**1**

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，$e$ は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1) 自然数 $n$ に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1)の 2 つの実数解を $\alpha_n$，$\beta_n$ $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$，$ne<\beta_n$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

△OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし，$0<\alpha<1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長を交わる点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $\alpha$ を用いて表せ。

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ で $\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\alpha$ を用いて表せ。

(3)　(2)の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの $\alpha$ の値を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$a_1 = b_1 = 1$および，関係式

$$a_{n+1} = 2a_nb_n\ ,\ \ b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 3$ のとき，$a_n$ は 3 で割り切れるが，$b_n$ は 3 で割り切れないことを示せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$a_n$ と $b_n$ は互いに素であることを示せ。

**4**

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|$ を考える。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して，$F(a)=\int_0^a f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ となる $x$ を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　$F(a)$ を求めよ。

**5**

解答解説のページへ

区間$[a,\ b]$が関数$f(x)$に関して不変であるとは,

$$a \leqq x \leqq b \text{ ならば, } a \leqq f(x) \leqq b$$

が成り立つこととする。$f(x)=4x(1-x)$とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 区間$[0,\ 1]$は関数$f(x)$に関して不変であることを示せ。

(2) $0<a<b<1$ とする。このとき, 区間$[a,\ b]$は関数$f(x)$に関して不変ではないことを示せ。

## 1

問題のページへ

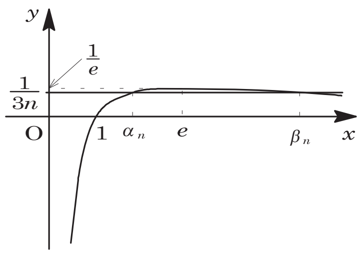
| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

ここで, $n\geqq 1$，$e<3$ から,

$$3n>ne\geqq e,\ 0<\frac{1}{3n}<\frac{1}{e}$$

すると，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{1}{3n}$ は 2 つの共有点をもつ。よって，$f(x)=\dfrac{1}{3n}$ は，$x>0$ の範囲に 2 つの実数解をもつ。




(2)　まず, $n\geqq 1$ から $e^{\frac{1}{n}}\leqq e\leqq ne$ となり，$0<x\leqq e^{\frac{1}{n}}$ において $f(x)$ は単調に増加し，$x\geqq ne$ において $f(x)$ は単調に減少する。

さて，$f(\alpha_n)=\dfrac{1}{3n}>0=f(1)$ であり,

$$f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}\geqq\frac{1}{ne}>\frac{1}{3n}=f(\alpha_n)$$

よって，$f(1)<f(\alpha_n)<f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$ となり，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$ ………(*)

また，$f(ne)=\dfrac{\log ne}{ne}\geqq\dfrac{\log e}{ne}>\dfrac{1}{3n}=f(\beta_n)$ より，$ne<\beta_n$ である。

ここで, $n\to\infty$ のとき $e^{\frac{1}{n}}\to 1$ なので, (*)より,

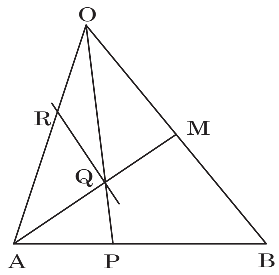
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$$

### [解　説]

微分法の基本問題です。(2)の不等式は，曲線 $y=f(x)$ を見ながら立式しました。

**2**

問題のページへ




(1)　AP : PB $= \alpha : 1-\alpha$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

また, △OPB と直線 AM に対して, メネラウスの定理を適用すると,

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QO}} = 1,\ \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QO}} = 1$$

よって, PQ : QO $= \alpha : 1$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t\vec{a}$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ から,

$$-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)|\vec{a}|^2 + \left\{-\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\right\}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}|\vec{b}|^2 = 0$$

条件より, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times3\times\frac{1}{6} = 1$ なので, まとめると,

$$\frac{7}{2}t = \frac{7-14\alpha}{2(1+\alpha)},\ t = \frac{1-2\alpha}{1+\alpha}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}$

(3)　点 R が辺 OA の中点であるとき, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}\vec{a}$ であり, (2)から,

$$\frac{1-2\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2},\ 2-4\alpha = 1+\alpha,\ \alpha = \frac{1}{5}$$

## [解 説]

頻出のベクトルの平面図形への応用です。やや計算量は多いものの, 内容は基本的です。

**3**

問題のページへ

(1)　$n \geqq 3$ のとき，$a_n$ は 3 で割り切れるが，$b_n$ は 3 で割り切れないことを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=3$ のとき　$a_1=b_1=1$ より，$a_2=2\times1\times1=2$，$b_2=2\times1^2+1^2=3$ となり，

$$a_3=2\times2\times3=12,\ b_3=2\times2^2+3^2=17$$

よって，題意は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k$ は 3 で割り切れ，$b_k$ は 3 で割り切れないと仮定する。

すなわち $l, m$ を整数として，

$$a_k=3l,\ b_k=3m\pm1$$

このとき，$a_{k+1}=6l(3m\pm1)=3\cdot2l(3m\pm1)$

$$b_{k+1}=2\cdot9l^2+(3m\pm1)^2=3(6l^2+3m^2\pm2m)+1$$

よって，$n=k+1$ のとき，題意は成立する。

(i)(ii)より, $n \geqq 3$ のとき，$a_n$ は 3 で割り切れるが，$b_n$ は 3 で割り切れない。

(2)　まず, $n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1}=2a_nb_n$ より，$a_n$ は偶数である。

また，$b_1=1$，$b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$ より，帰納的に $b_n$ は奇数である。

さて，$n \geqq 2$ のとき $a_n$ と $b_n$ は互いに素であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　$a_2=2$，$b_2=3$ から，$a_2$ と $b_2$ は互いに素である。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k$ と $b_k$ は互いに素であると仮定する。

ここで，$a_{k+1}$ と $b_{k+1}$ が 2 以上の公約数をもつとする。すると，$a_{k+1}$ は偶数，$b_{k+1}$ は奇数から，この公約数は 3 以上の素数を約数としてもつ。

この素数を $g$ とし，$a'$，$b'$ を整数とすると，

$$a_{k+1}=2a_kb_k=ga' \cdots\cdots①,\ b_{k+1}=2{a_k}^2+{b_k}^2=gb' \cdots\cdots②$$

①より，$a_k$ と $b_k$ のいずれかは $g$ の倍数となる。

$a_k$ が $g$ の倍数であるとき，②より ${b_k}^2$ は $g$ の倍数，すなわち $b_k$ は $g$ の倍数である。また，$b_k$ が $g$ の倍数であるとき，②より $2{a_k}^2$ は $g$ の倍数，すなわち $a_k$ は奇数 $g$ の倍数である。

いずれの場合も，$a_k$ と $b_k$ は互いに素であるという仮定に反するので，$a_{k+1}$ と $b_{k+1}$ は互いに素である。

(i)(ii)より, $n \geqq 2$ のとき，$a_n$ と $b_n$ は互いに素である。

### [解　説]

整数と漸化式の融合問題です。ただ, (2)の証明を考えるときに, (1)の結論に縛られすぎると, 時間を空費してしまいます。

**4**

問題のページへ

(1)　$f(x)=0$ より，$\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|=0$，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\sin x-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$

すると，$\sin x=1$，$\sin x=0$ から，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$0$，$\pm\pi$

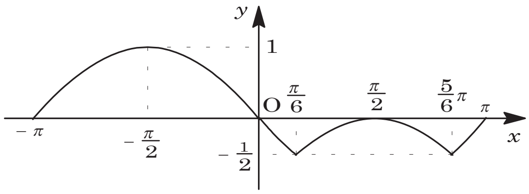
(2)　$g(x)=\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}$ とおくと，

(i)　$-\pi\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$g(x)=-\sin x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\sin x$

(ii)　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\sin x-1$$

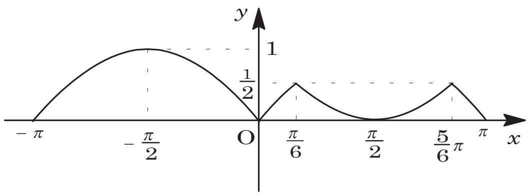
よって，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。




すると，$f(x)=|g(x)|$ から，

$$f(x)=g(x)\quad(g(x)\geqq 0)$$
$$f(x)=-g(x)\quad(g(x)\leqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。




(3)　まず，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき $f(x)=\sin x$，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(x)=-\sin x+1$

また，$y=f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものであり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ においては，$f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$ となる。

(i)　$0\leqq a\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$F(a)=\int_0^a\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left[\ \sin^2 x\ \right]_0^a=\frac{1}{2}\sin^2 a$$

(ii)　$\dfrac{\pi}{6}\leqq a\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^a(-\sin x+1)\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left[\ \sin^2 x\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^a+\left[\ \sin x\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^a=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin^2 a-\frac{1}{4}\right)+\sin a-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\sin^2 a+\sin a-\frac{1}{4}$$

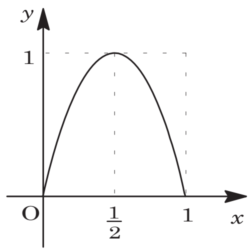
［解 説］

絶対値つきの関数のグラフを描く問題です。丁寧な場合分けがすべてです。

**5**

問題のページへ

(1)　まず，$f(x)=4x(1-x)=-4x^2+4x=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$




すると，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，最大値が $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，最小値が $f(0)=f(1)=0$ より，$0\leqq f(x)\leqq 1$ が成り立つ。

よって，区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変である。

(2)　(i)　$0<a<b\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$a\leqq x\leqq b$ において，$f(a)\leqq f(x)\leqq f(b)$ が成立する。

すると，区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるためには $f(b)\leqq b$，すなわち $-4b^2+4b\leqq b$，$b\geqq\dfrac{3}{4}$ が必要である。

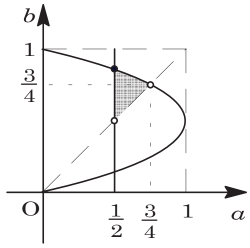
ところが，これは $b\leqq\dfrac{1}{2}$ に反する。

(ii)　$0<a<\dfrac{1}{2}<b<1$ のとき

$a\leqq x\leqq b$ において，$f(a)\leqq f(x)\leqq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ または $f(b)\leqq f(x)\leqq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ が成立する。すると，区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるためには，いずれの場合も $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqq b$，すなわち $1\leqq b$ が必要である。

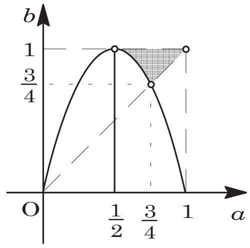
ところが，これは $b<1$ に反する。

(iii)　$\dfrac{1}{2}\leqq a<b<1$ のとき




$a\leqq x\leqq b$ において，$f(b)\leqq f(x)\leqq f(a)$ が成立するので，区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変である条件は，$a\leqq f(b)$，$f(a)\leqq b$ である。

$$a\leqq 4b(1-b)\ \cdots\cdots①,\quad 4a(1-a)\leqq b\ \cdots\cdots②$$




ここで，$ab$ 平面上に $\dfrac{1}{2}\leqq a<b<1$ のもとで，①を図示すると右上図の網点部となり，②を図示すると右下図の網点部となる。

すると，①と②をともに満たす $(a,\ b)$ は存在しない。

(i)〜(iii)より，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではない。

## ［解　説］

(iii)の場合は，連立不等式が複雑なので，式変形をする代わりに，図示して処理しました。