1

解答解説のページへ

$f(x)=xe^x$ とおく。また p を $p\geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x\geqq 0$ において $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y=f(x)$，接線 $y=g(x)$，および 2 直線 $x=0$，$x=L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p\geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

p を $0<p<1$ を満たす数とし，行列 A, B, C をそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに，行列 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$A_1=A\,,\ A_{n+1}=A_nB-BA_n+C\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A_2，A_3 を求めよ。

(2)　$A_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，$\Delta_n=a_nd_n-b_nc_n$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Delta_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

a, b を正の数とし, 空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$, $\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$, $\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α, 原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また, 平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき, 線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき, 四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし, P は平面 α 上にはないものとする。

4 解答解説のページへ

さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に $a,\ b,\ c$ とする。これらの数 $a,\ b,\ c$ に対して 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

を考える。ただし，さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式$(*)$が異なる 2 つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組$(a,\ c)$がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2) 2 次方程式$(*)$が異なる 2 つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし，一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

5

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい, p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=|\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。

(2)　自然数 m，n に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=|\sin mx|\sin nx$ とおく。p が関数 $f(x)$ の周期ならば，$f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=0$ が成り立つことを示せ。また，このとき mp は π の整数倍であり, np は 2π の整数倍であることを示せ。

(3)　m，n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2)の結果を用いて関数 $|\sin mx|\sin nx$ の基本周期を求めよ。

1

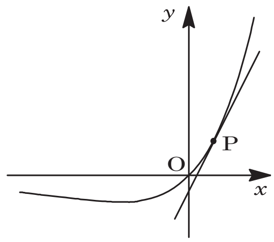
問題のページへ

(1)　$f(x)=xe^x$ に対して，$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式は，

$$y-pe^p=(1+p)e^p(x-p),\quad y=(1+p)e^px-p^2e^p$$

よって，$g(x)=(1+p)e^px-p^2e^p$ となる。



ここで，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=(1+x)e^x-(1+p)e^p$$

$$h''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$

$x\geqq 0$ において $h''(x)>0$ より $h'(x)$ は単調増加し，$h(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって，$x\geqq 0$ において $h(x)\geqq 0$，すなわち $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つ。

(2)　(1)より，$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq g(x)$ なので，

$$S(p)=\int_0^L\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^L\{xe^x-(1+p)e^px+p^2e^p\}dx$$

$$=\int_0^L xe^xdx-\frac{L^2}{2}(1+p)e^p+Lp^2e^p=\int_0^L xe^xdx+\frac{L}{2}(-L-Lp+2p^2)e^p$$

$$S'(p)=\frac{L}{2}\{(-L+4p)e^p+(-L-Lp+2p^2)e^p\}$$

$$=\frac{L}{2}\{2p^2+(4-L)p-2L\}e^p$$

$$=\frac{L}{2}(2p-L)(p+2)e^p$$

p	0	$\cdots$	$\frac{L}{2}$	$\cdots$
$S'(p)$		$-$	0	$+$
$S(p)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$p=\dfrac{L}{2}$ のとき，$S(p)$ は最小値をとる。

［解 説］

$y=f(x)$ のグラフは，$x\geqq 0$ のとき下に凸というのが(1)の結論です。なお，明記していませんが，$p=0$ のときも同様です。

2

問題のページへ

(1)　$A_2 = A_1B - BA_1 + C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+p \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1-p & -1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_3 = A_2B - BA_2 + C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+2p+p^2 \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p \\ -1-p & -1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+p+p^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)　(1)より，$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1+p+\cdots+p^{n-1} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1-p^n}{1-p} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ と予測できるので，以下，

この予測の正しいことを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 1$ のとき　$A_1 = A$ より，成立する。

(ii)　$n = k$ のとき　$A_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $b_k = \dfrac{1-p^k}{1-p}$ と仮定する。

$A_{k+1} = A_kB - BA_k + C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_k \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+b_k(1+p) \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_k-1 \\ -1-p & -1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+b_kp \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

さて，$1 + b_kp = 1 + \dfrac{1-p^k}{1-p}\cdot p = \dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$ より，$n = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$A_n = \begin{pmatrix} 1 & b_n \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $b_n = \dfrac{1-p^n}{1-p}$

以上より，$\varDelta_n = -1 + b_n = -1 + \dfrac{1-p^n}{1-p}$ となり，$0 < p < 1$ より，

$$\lim_{n\to\infty} \varDelta_n = -1 + \frac{1}{1-p} = \frac{p}{1-p}$$

［解 説］

A_2，A_3 から A_n を予測し，それを数学的帰納法で証明するという構図になっており，その通りに計算を進めました。

3

問題のページへ

(1)　$A(a,\ -a,\ b)$，$B(-a,\ a,\ b)$より，$\overrightarrow{AB}=(-2a,\ 2a,\ 0)$

また，$C(a,\ a,\ -b)$, ABの中点$D(0,\ 0,\ b)$より，

$$\overrightarrow{DC}=(a,\ a,\ -2b),\ \overrightarrow{DO}=(0,\ 0,\ -b)$$

すると，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=-2a^2+2a^2=0$，$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$から，

$$\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DO}\perp\overrightarrow{AB}$$

よって，$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot DC=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4a^2}\sqrt{a^2+a^2+4b^2}=2a\sqrt{a^2+2b^2}$

(2)　$\overrightarrow{DC}$と$\overrightarrow{DO}$のなす角θは，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DO}}{|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{DO}|}=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+a^2+4b^2}\cdot b}=\frac{2b}{\sqrt{2a^2+4b^2}}$$

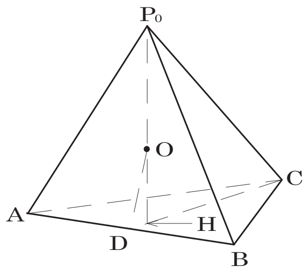
よって，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4b^2}{2a^2+4b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

さて, OHは平面αに垂直なので，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$となり，

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

すると，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$となり，点Hは直線CD上に存在し，

$$OH=DO\sin\theta=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$



(3)　球面Sの半径rは　$r=OA=OB=OC=\sqrt{2a^2+b^2}$

ここで，HO の延長線と S との交点をP_0とおくと，

S上の点Pと平面αの距離の最大値はP_0Hとなり，

$$P_0H=r+OH=\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

したがって，四面体ABCPの体積の最大値は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot P_0H=\frac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}a\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}+ab\right)$$

［解 説］

図示すると，(1)の結論は明らかですが，続く設問への誘導となっています。コンパクトにまとまった1題です。

4

問題のページへ

(1)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ条件は，

$$b^2-4ac>0,\ \ ac<\frac{b^2}{4}$$

ここで，$\dfrac{b^2}{4}\leqq\dfrac{6^2}{4}=9$ より，$ac\leqq 8$ となる。

(i)　$ac=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$ より, 1 通りある。

(ii)　$ac=2$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ より, 2 通りある。

(iii)　$ac=3$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ より, 2 通りある。

(iv)　$ac=4$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ より, 3 通りある。

(v)　$ac=5$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ より, 2 通りある。

(vi)　$ac=6$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$ より, 4 通りある。

(vii) $ac=8$ のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$ より, 2 通りある。

(2)　まず, (1)の場合のもとで，b^2-4ac が正の平方数となる b の値を求める。

(i)　$ac=1$ のとき　$b^2-4ac=b^2-4$ から, b の値はない。

(ii)　$ac=2$ のとき　$b^2-4ac=b^2-8$ より，$b=3$ となる。

(iii)　$ac=3$ のとき　$b^2-4ac=b^2-12$ より，$b=4$ となる。

(iv)　$ac=4$ のとき　$b^2-4ac=b^2-16$ より，$b=5$ となる。

(v)　$ac=5$ のとき　$b^2-4ac=b^2-20$ より，$b=6$ となる。

(vi)　$ac=6$ のとき　$b^2-4ac=b^2-24$ より，$b=5$ となる。

(vii) $ac=8$ のとき　$b^2-4ac=b^2-32$ より，$b=6$ となる。

これより，b^2-4ac が正の平方数となる $(a,\ b,\ c)$ の組の数は，

$$1\times2+1\times2+1\times3+1\times2+1\times4+1\times2=15$$

よって, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの有理数解をもつ確率は，

$$\frac{15}{6^3}=\frac{5}{72}$$

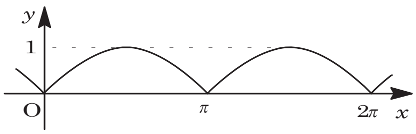
［解　説］

2 つの設問とも，ていねいな数え上げがすべてです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$\sin x \geqq 0$ のとき $|\sin x| = \sin x$，$\sin x < 0$ のとき $|\sin x| = -\sin x$ より，$y = |\sin x|$ のグラフは右図のようになり，基本周期は π である。



(2)　関数 $f(x)$ の周期が p より，

$$f(x+p) = f(x) \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$x = -\dfrac{p}{2}$ のとき，$f\left(-\dfrac{p}{2}+p\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) \cdots\cdots\cdots ②$

一方，$f(-x) = |\sin(-mx)|\sin(-nx) = -|\sin mx|\sin nx = -f(x)$ から，

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) = -f\left(\frac{p}{2}\right) \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$

さて，①より，$|\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) = |\sin mx|\sin nx \cdots\cdots\cdots ④$

また，$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = \left|\sin\dfrac{mp}{2}\right|\sin\dfrac{np}{2} = 0$ から，$\sin\dfrac{mp}{2} = 0$ または $\sin\dfrac{np}{2} = 0$

(i)　$\sin\dfrac{mp}{2} = 0$ のとき

k を整数として，$\dfrac{mp}{2} = k\pi$ より $mp = 2k\pi$ となり, mp は π の整数倍となる。

このとき，$|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$ となり，④より，

$$|\sin mx|\sin(nx+np) = |\sin mx|\sin nx$$

どんな x に対しても成立することより，$\sin(nx+np) = \sin nx$

よって, np は 2π の整数倍である。

(ii)　$\sin\dfrac{np}{2} = 0$ のとき

l を整数として，$\dfrac{np}{2} = l\pi$ より $np = 2l\pi$ となり, np は 2π の整数倍となる。

このとき，$\sin(nx+np) = \sin nx$ となり，④より，

$$|\sin(mx+mp)|\sin nx = |\sin mx|\sin nx$$

どんな x に対しても成立することより，$|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$

よって, mp は π の整数倍である。

(i)(ii)より, mp は π の整数倍であり, np は 2π の整数倍である。

(3)　(2)より，$mp = k\pi$，$np = 2l\pi$ より，

$$p = \frac{k\pi}{m} = \frac{2l\pi}{n},\quad kn = 2lm$$

ここで, m と n は互いに素なので, k は m の倍数となり，k' を整数として，

$$k = mk'$$

このとき，$p=\dfrac{mk'\pi}{m}=k'\pi$ となることより，周期 p は π の整数倍であり，

$$f(x+k'\pi)=\left|\sin(mx+mk'\pi)\right|\sin(nx+nk'\pi)=(-1)^{nk'}\left|\sin mx\right|\sin nx$$

(i)　n が偶数のとき

$k'=1$ として，$f(x+\pi)=f(x)$ となるので，基本周期は π である。

(ii)　n が奇数のとき

$k'=2$ として，$f(x+2\pi)=f(x)$ となるので，基本周期は 2π である。

［解　説］

(2)では $f(x)$ が奇関数であることに注目して，解の糸口をみつけました。なお，(2)の後半から，誘導はあるものの，設問の難度は著しく上昇しています。