1　　解答解説のページへ

自然数 n に対して，$a_n = (\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a_1 = \dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2)　$a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

(3)　$a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。

2

解答解説のページへ

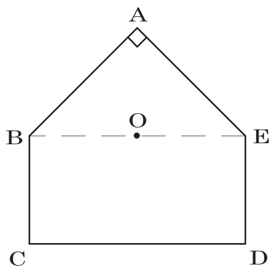
放物線$C: y = x^2$上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点$(p,\ p^2)$におけるCの法線の方程式を求めよ。

(2)　y軸上の点$(0,\ a)$を通るCの法線の本数を求めよ。

3

解答解説のページへ



図のような五角形 ABCDE（角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形）において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点 O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i = \mathrm{B}$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP_i}}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

放物線$C : y = x^2 - 1$と$a_1 > 1$を満たす実数a_1を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点$(a_1,\ a_1{}^2 - 1)$における接線と x 軸との交点の x 座標をa_2とするとき，a_2をa_1を用いて表せ。

(2) (1)で求めたa_2に対して，C 上の点$(a_2,\ a_2{}^2 - 1)$おける接線と x 軸との交点の x 座標をa_3とする。この操作を繰り返してできる数列をa_1，a_2，…，a_n，…とする。このとき，すべてのnに対して，$a_n > 1$を示せ。

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$とおくとき，すべての$n$に対して，$b_{n+1} < b_n{}^2$を示せ。

(4) $a_1 = 2$のとき，$b_n < 10^{-12}$となる n の値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$を 0.301 として計算してよい。

1

問題のページへ

(1)　$a_1=(\cos 2)(\cos 1)$なので,

$$4a_1\sin 1=4(\cos 2)(\cos 1)\sin 1=2(\cos 2)\sin 2=\sin 4$$

よって，$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2)　$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$のとき

(1)から，$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$となるので成立している。

(ii)　$n=k$のとき

$a_k=\dfrac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}$と仮定すると,

$$a_{k+1}=(\cos 2^{k+1})a_k=(\cos 2^{k+1})\frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+1}\sin 1}=\frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2}\sin 1}$$

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，自然数nに対して，$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$である。

(3)　$\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{2}$より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin 1<1$となるので, (2)より,

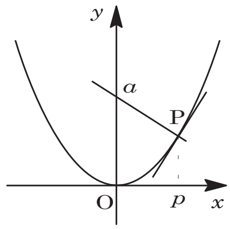
$$a_n=\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}\leqq\frac{1}{2^{n+1}\sin 1}<\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

［解 説］

サインの 2 倍角公式の適用に気付くことがポイントです。なお, (3)は，結論を変形して方針を立てましたが，大雑把な評価で証明可能でした。

2

問題のページへ



(1)　$C: y=x^2$ より，$y'=2x$ となり，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方向ベクトル，すなわち法線の法線ベクトルの成分は，$(1,\ 2p)$ と表せる。

これより, P における法線の方程式は,

$$(x-p)+2p(y-p^2)=0$$

$$x+2py-p-2p^3=0 \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①が点$(0,\ a)$を通る条件は，$2pa-p-2p^3=0 \cdots\cdots\cdots②$

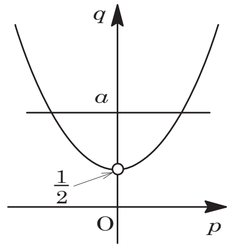
ここで，②の異なる実数解 p の個数が，点$(0,\ a)$を通る法線の本数に一致することより，

(i)　$p=0$ のとき

②は任意の実数 a で成立する。

(ii)　$p \neq 0$ のとき

②より，$2a-1-2p^2=0$，$a=p^2+\dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots③$



さて，$p \neq 0$ のもとで，③の異なる実数解 p の個数は，直線 $q=a$ と $q=p^2+\dfrac{1}{2}$ のグラフの共有点の個数に一致する。

すると，右図より，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき p は 2 個存在し，$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき p は存在しない。

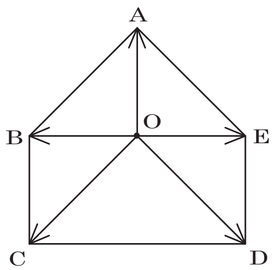
(i)(ii)より，題意の法線の本数は，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき 3 本，$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき 1 本である。

［解 説］

法線の本数についての基本的な問題です。ただし，$a=\dfrac{1}{2}$ の場合は要注意です。

3

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ=1$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ の組の選び方は $5^2=25$ 通りで，これらは同様に確からしい。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=1$ となる$(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})$の選び方は，

$(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})=(\mathrm{A},\ \mathrm{A}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{E}),$
$(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{C},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{D})$

よって, 7 通りあるので，この確率は $\dfrac{7}{25}$ である。

(3)　まず，$q_i=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}=-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}\neq 0$ となるのは，$\mathrm{P}_i=\mathrm{A},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}$ のときである。これより，$q_1q_2\cdots q_n\neq 0$ となる確率は，$\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ となる。

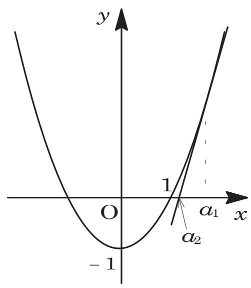
よって，$q_1q_2\cdots q_n=0$ となる確率は，$1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ である。

［解 説］

問題文が長く，ハッタリがきいていますが，内容はごく平凡なものです。特に，(3)は，裏があるのではないかと，疑念が湧いてしまいます。

4

問題のページへ



(1)　$C: y=x^2-1$ に対して，$y'=2x$ より，点 $(a_1,\ {a_1}^2-1)$ における接線は，

$$y-({a_1}^2-1)=2a_1(x-a_1)$$

点 $(a_2,\ 0)$ を通ることより，

$$-{a_1}^2+1=2a_1(a_2-a_1),\ 2a_1a_2={a_1}^2+1$$

よって，$a_2=\dfrac{{a_1}^2+1}{2a_1}$

(2)　(1)と同様にすると，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2+1}{2a_n}$ となる。

ここで，すべての n に対して，$a_n>1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$ のとき　条件より $a_1>1$ なので，成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>1$ と仮定すると，

$$a_{k+1}-1=\frac{{a_k}^2+1}{2a_k}-1=\frac{(a_k-1)^2}{2a_k}>0$$

よって，$a_{k+1}>1$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対して $a_n>1$ である。

(3)　条件より，$b_n=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$ なので，

$$\begin{aligned}{b_n}^2-b_{n+1}&=\frac{1}{4}(a_n-1)^2-\frac{1}{2}(a_{n+1}-1)=\frac{1}{4}(a_n-1)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}\\&=\frac{1}{4}(a_n-1)^2\cdot\frac{a_n-1}{a_n}=\frac{(a_n-1)^3}{4a_n}\end{aligned}$$

$a_n>1$ より，${b_n}^2-b_{n+1}>0$ すなわち $b_{n+1}<{b_n}^2$ ……(*)である。

(4)　まず，$b_1=\dfrac{1}{2}(2-1)=\dfrac{1}{2}$ であり，$a_n>1$ から $b_n>0$ となるので，(*)より，

$$\log_{10}b_{n+1}<2\log_{10}b_n$$

よって，$n\geqq 2$ において，$\log_{10}b_n<2^{n-1}\log_{10}b_1=-2^{n-1}\log_{10}2=-0.301\times 2^{n-1}$

ここで，$b_n<10^{-12}$，すなわち $\log_{10}b_n<\log_{10}10^{-12}=-12$ を満たすためには，

$$-0.301\times 2^{n-1}\leqq -12,\ 2^{n-1}\geqq\frac{12}{0.301}>39.8$$

よって，$n\geqq 7$ であればよく，求める n の値の 1 つは 7 である。

［解 説］

有名なニュートン法の問題です。理系に類題が出題されていると思いましたが，その予測ははずれました。