1　解答解説のページへ

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取った番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り，2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。

(2)　2 以上 9 以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。

3

解答解説のページへ

△OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形△OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a, b, c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b, c を用いて表せ。

(3)　3 辺 OA, OB, AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし，3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

$a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x$ $(x>0)$，$g(x)=\sqrt{x-1}$ $(x \geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点をもたないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

5

解答解説のページへ

いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$$

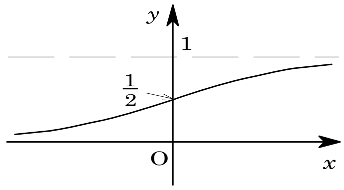
$$=-\frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2}$	↗

また，$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ と変形すると，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

これより，$y=1$，$y=0$ の 2 本の漸近線が存在し，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2) $y=f(x)\iff x=f^{-1}(y)$ より，$y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおき，x について解くと，

$$(1-y)e^x=y,\ x=\log\frac{y}{1-y}\quad(0<y<1)$$

よって，$f^{-1}(y)=\log\dfrac{y}{1-y}$ より，$f^{-1}(x)=\log\dfrac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$

(3) $f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\log\dfrac{\frac{1}{n+2}}{1-\frac{1}{n+2}}-\log\dfrac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\log\dfrac{1}{n+1}-\log\dfrac{1}{n}$ から，

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}n\log\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\log\frac{1}{e}=-1$$

［解 説］

関数のグラフに関する基本問題です。(3)で，ひとひねりがあると予測しましたが，これは，はずれてしまいました。

2

問題のページへ

(1)　得点が 1 であるのは, 1 回目に 2 以上 k 以下のカードを抜き取り, 2 回目に 1 のカードを抜き取る場合より, その確率は,

$$\frac{k-1}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{k-1}{90}$$

また, 得点が 10 であるのは, 1 回目に 10 のカードを抜き取る場合か, 1 回目に k 以下のカードを抜き取り, 2 回目に 10 のカードを抜き取る場合より, その確率は,

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{k+9}{90}$$

(2)　まず, $k\neq 9$ のとき, 得点 n が k 以下の場合と, k より大の場合に分ける。

(i)　$2\leqq n\leqq k$ の場合

1 回目に n を除く k 以下のカードを抜き取り, 2 回目に n のカードを抜き取る場合より, その確率は,

$$\frac{k-1}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{k-1}{90}$$

(ii)　$k< n\leqq 9$ の場合

1 回目に n のカードを抜き取る場合か, 1 回目に k 以下のカードを抜き取り, 2 回目に n のカードを抜き取る場合より, その確率は,

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{k+9}{90}$$

なお, $k=9$ のとき, 得点が n である確率は, $\frac{8}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{4}{45}$ である。

(3)　得点の期待値を E とすると,

$$E=\sum_{n=1}^{k}n\cdot\frac{k-1}{90}+\sum_{n=k+1}^{10}n\cdot\frac{k+9}{90}=\frac{k-1}{90}\cdot\frac{k+1}{2}k+\frac{k+9}{90}\cdot\frac{10+k+1}{2}(10-k)$$

$$=\frac{1}{180}(k^3-k)+\frac{1}{180}(-k^3-10k^2+101k+990)=\frac{1}{18}(-k^2+10k+99)$$

この値は, $k=9$ のときも満たしている。

［解　説］

(2)において, $k=9$ のときは(ii)の場合がありません。そのため, 補足のコメントをつけました。

$\boxed{3}$

問題のページへ

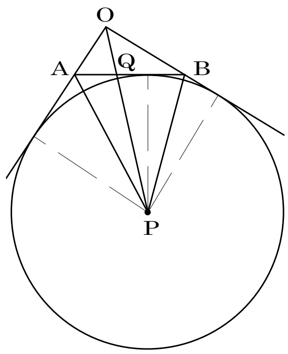
(1)　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}=a:b$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}$$

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}=a+b-c$ より，$\mathrm{OQ}:\mathrm{QP}=\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{ABP}=(a+b-c):c$ となり，

$$\mathrm{OQ}:\mathrm{OP}=(a+b-c):(a+b)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b-c}$



(3)　高さの等しい三角形の面積比は，底辺の長さの比になることより，

$$a:b:c=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}:\mathrm{AB}=3:5:6$$

よって，(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+5-6}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

［解　説］

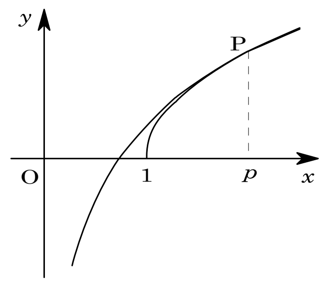
(3)は，三角形の傍心のベクトル表示ですが，(2)の誘導を利用すると，計算は不要です。なお，内角や外角の二等分線の定理を用いる解も可能ですが，これは出題者の善意に反します。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　まず，$f(x)=a+\log x$，$g(x)=\sqrt{x-1}$ に対し，

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$



さて，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，$x=p$ で接するとき，

$f(p)=g(p)$ より，$a+\log p=\sqrt{p-1}$ ………①

$f'(p)=g'(p)$ より，$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2\sqrt{p-1}}$ ………②

②より，$p=2\sqrt{p-1}$，$p^2=4p-4$ から $p=2$ となり，P$(2,\ 1)$ である。

①に代入して，$a=1-\log 2$

さらに，P$(2,\ 1)$ における接線 l は，

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2),\quad y=\frac{1}{2}x$$

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，(1)より，

$$h(x)=1-\log 2+\log x-\sqrt{x-1}$$

$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\sqrt{x-1}-x}{2x\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{-(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}\,(2\sqrt{x-1}+x)}$$

x	1	…	2	…
$h'(x)$		$-$	0	$-$
$h(x)$	$1-\log 2$	↘	0	↘

よって，$h(x)=0$ の解は $x=2$ のみであり，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は，点 P 以外の共有点をもたない。

(3)　まず，$y=1-\log 2+\log x$ に対して，$\log\dfrac{x}{2}=y-1$，$x=2e^{y-1}$

また，$y=\sqrt{x-1}$ に対して，$x=y^2+1$

すると，2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，

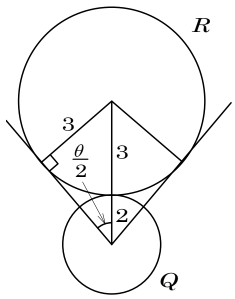
$$S=\int_0^1(y^2+1-2e^{y-1})\,dy=\left[\frac{y^3}{3}+y-2e^{y-1}\right]_0^1=\frac{4}{3}-2\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}-\frac{2}{3}$$

［解　説］

(3)では，計算を少し簡単にするために，y 軸方向に積分しています。

5

問題のページへ



(1)　条件より，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{3+2}=\dfrac{3}{5}$

すると，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$ となり，

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

(2)　$\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{7}{25}>0$ より，θ は鋭角である。

さて，$\sqrt{3}<\dfrac{48}{25}$ なので $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{24}{25}<1$ となり，

$$\sin\frac{\pi}{3}<\sin\theta<\sin\frac{\pi}{2}$$

よって，$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

(3)　配置できる半径 3 の円の最大個数を n とすると，

$$n\theta\leqq 2\pi<(n+1)\theta,\ n\leqq\frac{2\pi}{\theta}<n+1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\alpha=\dfrac{2}{5}\pi$ とおくと，$2\alpha=2\pi-3\alpha$ となり，

$$\sin 2\alpha=-\sin 3\alpha,\ 2\sin\alpha\cos\alpha=-3\sin\alpha+4\sin^3\alpha$$

$\sin\alpha\neq 0$ から，$2\cos\alpha=-3+4\sin^2\alpha$，$4\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$

$$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

また，$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{24}{25}\right)^2}=\dfrac{7}{25}$ であり，$\dfrac{53}{25}<\sqrt{5}$ から，$\dfrac{7}{25}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

よって，$\cos\theta<\cos\alpha$ となるので，$\theta>\alpha=\dfrac{2}{5}\pi$ から，(2)と合わせて，

$$\frac{2}{5}\pi<\theta<\frac{\pi}{2},\ 4<\frac{2\pi}{\theta}<5$$

すると，(＊)より，配置できる円の最大個数 n は，$n=4$ である。

［解　説］

(2)の結論がアバウトすぎて，(3)では，そのまま利用できません。そのため，$\dfrac{5}{12}\pi$ を用いて，θ を評価しようとしましたが，意図に反して，うまくいきません。ただ，θ が $\dfrac{5}{12}\pi$ に近い値であることはわかりましたので，求める n は 4 らしいと推測はできます。しかし，決め手不在のまま，時間はどんどん経過していきます。