1

解答解説のページへ

$\angle$A が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし，線分 AM を $1:3$ に内分する点を P とする。また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB，AC との交点をそれぞれ Q，R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle\mathrm{QMR}$ を求めよ。

(2)　$\angle\mathrm{QMR}$ の 2 倍と $\angle\mathrm{QMB}$ の大小を判定せよ。

2

解答解説のページへ

座標平面に 3 点 O(0, 0)，A(2, 6)，B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2)　$s = \frac{1}{2}$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

(3)　$s = 1$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある。これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a, b, c, d, e, f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$ となる確率を求めよ。

(2)　$a+b=c+d$ となる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

曲線 $y=x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし, $a<0<b$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

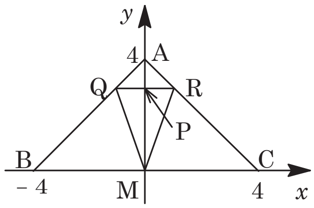
(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たしながら P と Q が動くとき, (2)で求めた面積の最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　M を原点とし，A(0, 4)，B(−4, 0)，C(4, 0) とする座標系を設定しても，一般性を失わない。

すると，AP : PM = 1 : 3 なので，AP = QP = RP = 1 となり，Q(−1, 3)，R(1, 3) より，

$$\overrightarrow{MQ}=(-1,\ 3),\ \overrightarrow{MR}=(1,\ 3)$$

よって，$\cos\angle QMR=\dfrac{\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MR}}{|\overrightarrow{MQ}||\overrightarrow{MR}|}=\dfrac{-1+9}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\dfrac{4}{5}$

(2)　(1)より，$\cos 2\angle QMR=2\cos^2\angle QMR-1=\dfrac{7}{25}$ ………①

また，$\overrightarrow{MB}=(-4,\ 0)$ から，

$$\cos\angle QMB=\frac{\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MQ}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{4}{\sqrt{10}\times 4}=\frac{1}{\sqrt{10}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$7\sqrt{10}<25$ から $\dfrac{7}{25}<\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ となり，①②より，

$$\cos 2\angle QMR<\cos\angle QMB$$

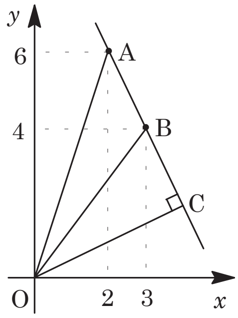
よって，$2\angle QMR>\angle QMB$ である。

［解 説］

いろいろな解法が考えられます。上の解は，座標系を設定したときの一例です。

2

問題のページへ



(1)　直線 AB の方程式は，A(2, 6)，B(3, 4) から，

$$y-6=-2(x-2),\ \ y=-2x+10\cdots\cdots①$$

直線 OC は直線 AB と垂直なので，その方程式は，

$$y=\frac{1}{2}x\cdots\cdots②$$

①②より，$-2x+10=\frac{1}{2}x$，$x=4$

②より，$y=2$ となり，C(4, 2)である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(2,\ 6)+t(3,\ 4)=(2s+3t,\ 6s+4t)$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2&=(2s+3t-4)^2+(6s+4t-2)^2\\&=(2s+3t)^2-8(2s+3t)+16+(6s+4t)^2-4(6s+4t)+4\\&=40s^2+60st+25t^2-40s-40t+20\end{aligned}$$

(2)　$s=\frac{1}{2}$, $t\geqq0$ のとき, (1)より,

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=10+30t+25t^2-20-40t+20=25t^2-10t+10=25\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+9$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は，$t=\frac{1}{5}$ のとき最小値 9 をとる。

(3)　$s=1$, $t\geqq0$ のとき, (1)より,

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=40+60t+25t^2-40-40t+20=25t^2+20t+20=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+16$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は，$t=0$ のとき最小値 20 をとる。

［解 説］

ベクトルの成分計算についての，不安になるほどの基本題です。

3

問題のページへ

(1)　$a+b=c$ となるのは, $a<b$ の場合では,

(i)　$c=3$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 2)$

(ii)　$c=4$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 3)$

(iii)　$c=5$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)$

(iv)　$c=6$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)$

(i)〜(iv)より，$a+b=c$ となる確率は, $d,\ e,\ f$ が任意の数から,

$$\frac{6\times2\times3!}{6!}=\frac{1}{10}$$

	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2	3		5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5	6	7		9	10
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9	10	11	

(2)　$a+b=c+d$ となるのは，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組が, $a<b$, $c<d$ の場合では,

(i)　$a+b=5$ のとき　$(1,\ 4,\ 2,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 1,\ 4)$

(ii)　$a+b=6$ のとき　$(1,\ 5,\ 2,\ 4)$，$(2,\ 4,\ 1,\ 5)$

(iii)　$a+b=7$ のとき　$(1,\ 6,\ 2,\ 5)$，$(2,\ 5,\ 1,\ 6)$，$(1,\ 6,\ 3,\ 4)$，
$(3,\ 4,\ 1,\ 6)$，$(2,\ 5,\ 3,\ 4)$，$(3,\ 4,\ 2,\ 5)$

(iv)　$a+b=8$ のとき　$(2,\ 6,\ 3,\ 5)$，$(3,\ 5,\ 2,\ 6)$

(v)　$a+b=9$ のとき　$(3,\ 6,\ 4,\ 5)$，$(4,\ 5,\ 3,\ 6)$

(i)〜(v)より，$a+b=c+d$ となる確率は, e, f が任意の数から,

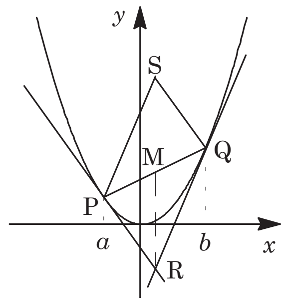
$$\frac{14\times2^2\times2!}{6!}=\frac{7}{45}$$

［解 説］

センター試験の解法のように，いったん，すべての場合を列挙して，もれなく数え上げるのが，ベストでしょう。

4

問題のページへ



(1)　$y=x^2$ より $y'=2x$ となり，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

同様にして，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は,

$$y=2bx-b^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$2ax-a^2=2bx-b^2$

$$2(b-a)x=b^2-a^2,\ \ x=\frac{a+b}{2}$$

①より，$y=2a\cdot\dfrac{a+b}{2}-a^2=ab$ となり，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$である。

ここで，線分 PQ の中点を M とおくと，$\mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$となり,

$$\mathrm{MR}=\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(b-a)^2}{2}$$

よって，$\triangle\mathrm{PRQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(b-a)^2}{2}\cdot(b-a)=\dfrac{1}{4}(b-a)^3$

(2)　直線 PQ の方程式は,

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a),\ \ y=(a+b)x-ab$$

さて，線分 PQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を S_0 とすると,

$$S_0=\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

さらに，$\triangle\mathrm{PSQ}=\triangle\mathrm{PRQ}$ を用いると，折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=S_0+\triangle\mathrm{PSQ}=\frac{1}{6}(b-a)^3+\frac{1}{4}(b-a)^3=\frac{5}{12}(b-a)^3 \cdots\cdots\cdots ③$$

(3)　条件より，直線 PR と QR が直交するので，$2a\cdot 2b=-1$，$a=-\dfrac{1}{4b}$

すると，③に代入して，$S=\dfrac{5}{12}\left(b+\dfrac{1}{4b}\right)^3$

$b>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係から,

$$b+\frac{1}{4b}\geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4b}}=1$$

ここで，等号は $b=\dfrac{1}{4b}\ \left(b=\dfrac{1}{2}\right)$のときに成立する。

以上より, S の最小値は $\dfrac{5}{12}\cdot 1^3=\dfrac{5}{12}$ である。

［解 説］

形式を変更すると，センター試験にそのまま流用できます。