1

解答解説のページへ

座標平面に 3 点 O(0, 0), A(2, 6), B(3, 4) をとり, 点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また, 実数 s と t に対し, 点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を求め, $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) s を定数として, t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき, $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚, …,「k」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M, 奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し, そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_1 と p_2 を M, N で表せ。

(2)　p_{n+1} を p_n , M, N で表せ。

(3)　$\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ。

(4)　p_n を n と k で表せ。

3

解答解説のページへ

曲線C_1：$y=\dfrac{x^2}{2}$の点$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$における法線と点$\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$における法線の交点をRとする。ただし，$b\neq a$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) bがaに限りなく近づくとき，Rはある点Aに限りなく近づく。Aの座標をaで表せ。

(2) 点Pが曲線C_1上を動くとき，(1)で求めた点Aが描く軌跡をC_2とする。曲線C_1と軌跡C_2の概形を描き，C_1とC_2の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線C_1と軌跡C_2で囲まれた部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

2 次の列ベクトル X, Y, Z は大きさが 1 であり，$X=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ かつ $Y\neq X$ とする。ただし，一般に 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ で定義される。また, 2 次の正方行列 A が

$$AX=Y\ ,\ \ AY=Z\ ,\ \ AZ=X$$

を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$Y\neq -X$ を示せ。

(2)　Z は $Z=sX+tY$ (s, t は実数) の形にただ一通りに表せることを示せ。

(3)　$X+Y+Z=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を示せ。

(4)　行列 A を求めよ。

5

解答解説のページへ

曲線 $y=e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}|=1$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるとして，次の問いに答えよ。

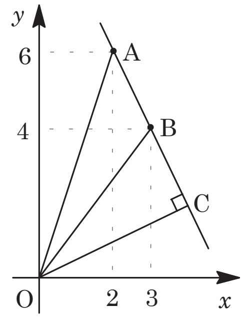
(1)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3)　P が曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　直線 AB の方程式は，$A(2,\ 6)$，$B(3,\ 4)$ から，

$y-6=-2(x-2)$，$y=-2x+10$ ………①

直線 OC は直線 AB と垂直なので，その方程式は，

$y=\frac{1}{2}x$ ………②

①②より，$-2x+10=\frac{1}{2}x$，$x=4$

②より，$y=2$ となり，$C(4,\ 2)$である。

また，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ より，

$$\overrightarrow{OP}=s(2,\ 6)+t(3,\ 4)=(2s+3t,\ 6s+4t)$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CP}|^2&=(2s+3t-4)^2+(6s+4t-2)^2\\&=(2s+3t)^2-8(2s+3t)+16+(6s+4t)^2-4(6s+4t)+4\\&=40s^2+60st+25t^2-40s-40t+20\end{aligned}$$

(2)　$t\geqq 0$ において，$f(t)=40s^2+60st+25t^2-40s-40t+20$ とおくと，

$$f(t)=25t^2+(60s-40)t+40s^2-40s+20=25\left(t+\frac{6s-4}{5}\right)^2+4s^2+8s+4$$

(i)　$-\frac{6s-4}{5}\geqq 0$ $\left(s\leqq\frac{2}{3}\right)$のとき

$|\overrightarrow{CP}|^2$ は，$t=-\frac{6s-4}{5}$ で最小値 $4s^2+8s+4$ をとる。

(ii)　$-\frac{6s-4}{5}<0$ $\left(s>\frac{2}{3}\right)$のとき

$|\overrightarrow{CP}|^2$ は，$t=0$ で最小値 $40s^2-40s+20$ をとる。

［解 説］

ベクトルの成分計算についての基本題です。文系に類題があります。

2

問題のページへ

(1) 偶数の書かれたカードを取り出す確率は$\dfrac{M}{M+N}$，奇数の書かれたカードを取り出す確率は$\dfrac{N}{M+N}$より，記録された 1 個の数が偶数となる確率p_1は，

$$p_1=\frac{M}{M+N}$$

また，記録された 2 個の数の和が偶数となるのは，偶数＋偶数または奇数＋奇数より，その確率p_2は，

$$p_2=\left(\frac{M}{M+N}\right)^2+\left(\frac{N}{M+N}\right)^2=\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}$$

(2) 記録された$n+1$個の数の和が偶数となるのは，n 個の数の和が偶数のとき$n+1$回目に偶数を取り出すか，n 個の数の和が奇数のとき$n+1$回目に奇数を取り出すかのいずれかより，

$$p_{n+1}=\frac{M}{M+N}p_n+\frac{N}{M+N}(1-p_n)=\frac{M-N}{M+N}p_n+\frac{N}{M+N}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) (i) kが偶数のとき　$M=2+4+\cdots+k=\dfrac{2+k}{2}\cdot\dfrac{k}{2}=\dfrac{2k+k^2}{4}$

$$N=1+3+\cdots+(k-1)=\frac{1+k-1}{2}\cdot\frac{k}{2}=\frac{k^2}{4}$$

よって，$\dfrac{M-N}{M+N}=\dfrac{(2k+k^2)-k^2}{(2k+k^2)+k^2}=\dfrac{1}{k+1}$

(ii) kが奇数のとき　$M=2+4+\cdots+(k-1)=\dfrac{2+k-1}{2}\cdot\dfrac{k-1}{2}=\dfrac{k^2-1}{4}$

$$N=1+3+\cdots+k=\frac{1+k}{2}\cdot\frac{k+1}{2}=\frac{k^2+2k+1}{4}$$

よって，$\dfrac{M-N}{M+N}=\dfrac{(k^2-1)-(k^2+2k+1)}{(k^2-1)+(k^2+2k+1)}=-\dfrac{1}{k}$

(4) (＊)より，$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{M-N}{M+N}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$と変形すると，

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}=\left(\frac{M}{M+N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M-N}{M+N}\right)^n$

(i) kが偶数のとき　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n$

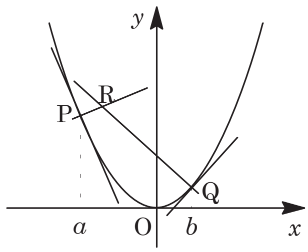
(ii) kが奇数のとき　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n$

［解 説］

頻出の確率と漸化式の融合問題です。非常に細かい誘導がついています。

3

問題のページへ



(1)　$y=\dfrac{x^2}{2}$ に対して $y'=x$ より，点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルの成分は $(1,\ a)$ となるので，法線の方程式は，

$$x-a+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0,\ x+ay=a+\frac{a^3}{2}\cdots\cdots\cdots ①$$

同様にして，点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は，

$$x+by=b+\frac{b^3}{2}\cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$(a-b)y=(a-b)+\dfrac{1}{2}(a^3-b^3)$

交点 R の座標は，$b\neq a$ から $y=\dfrac{1}{2}(2+a^2+ab+b^2)$，①より $x=-\dfrac{1}{2}ab(a+b)$

ここで，$b\to a$ のとき，

$$x\to-\frac{1}{2}a^2\cdot 2a=-a^3,\ y\to\frac{1}{2}(2+a^2+a^2+a^2)=1+\frac{3}{2}a^2$$

よって，$\mathrm{A}\left(-a^3,\ 1+\dfrac{3}{2}a^2\right)$ である。

(2)　$\mathrm{A}(x,\ y)$ とすると，軌跡 C_2 は，$x=-a^3$，$y=1+\dfrac{3}{2}a^2\cdots\cdots ③$ と表せる。

さて，$x=f(a)$，$y=g(a)$ とおくと，

$$f(-a)=-f(a),\ g(-a)=g(a)$$

これより，C_2 の $a\geqq 0$ の部分と $a\leqq 0$ の部分は y 軸対称となる。そこで, $a\geqq 0$ において,

a	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{da}$		$-$
x	0	↘
$\dfrac{dy}{da}$		$+$
y	1	↗

$$\frac{dx}{da}=-3a^2,\ \frac{dy}{da}=3a$$

すると，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3a}{-3a^2}=-\dfrac{1}{a}$ から，

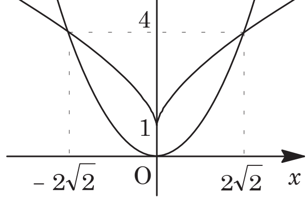
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{da}\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{dx}=\frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{3a^2}\right)=-\frac{1}{3a^4}<0$$

これより，軌跡 C_2 を表す曲線は上に凸である。

さらに，$C_1: y=\dfrac{x^2}{2}$ との交点は，$1+\dfrac{3}{2}a^2=\dfrac{1}{2}a^6$

$$a^6-3a^2-2=0,\ (a^2-2)(a^2+1)^2=0$$

よって $a=\sqrt{2}$ となり，③から $x=-2\sqrt{2}$，$y=4$ である。



以上より，曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形は右図のようになる。また, 2 つの交点の座標は，$(-2\sqrt{2},\ 4)$，$(2\sqrt{2},\ 4)$ である。

(3)　軌跡 C_2 は，$a=\sqrt[3]{-x}$ より，$y=1+\dfrac{3}{2}(\sqrt[3]{-x})^2=1+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ となる。

さて，曲線C_1と軌跡C_2で囲まれた部分の面積を S とすると，C_1，C_2がともに y 軸対称より，

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\int_0^{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=2\left[x+\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{2\sqrt{2}}=2\left(2\sqrt{2}+\frac{18}{5}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{88}{15}\sqrt{2}$$

［解 説］

(2)において，C_2の概形を描くときはパラメータ表示のままで処理をしましたが，(3)の設問を考えると，この段階でパラメータを消去した方がよかったかもしれません。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) 条件より，$AX=Y$ ……①，$AY=Z$ ……②，$AZ=X$ ……③

さて，$Y=-X$ と仮定すると，①より $AX=-X$ ………④

②④から，$Z=A(-X)=-AX=X$ となり，③に適用すると，

$$AX=X \text{ ………⑤}$$

④⑤より，$-X=X$ から $X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となり, X の大きさが 1 であることに反する。

以上より，$Y\neq -X$ である。

(2) Y, Z は大きさが 1 であり，条件と(1)より，$Y\neq\pm X$ なので,

$$Y=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\ (0<\theta<\pi,\ \pi<\theta<2\pi),\ Z=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\ (0\leqq\theta<2\pi)$$

すると，$\sin\theta\neq 0$ から,

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\left(\cos\varphi-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

よって, Z は $Z=sX+tY$（s，t は実数）の形にただ一通りに表せる。

(3) $Z=sX+tY$ のとき，①②③より,

$$X=A(sX+tY)=sAX+tAY=sY+tZ=sY+t(sX+tY)=stX+(s+t^2)Y$$

すると，$(st-1)X+(s+t^2)Y=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となり, (2)から,

$$st-1=0,\ s+t^2=0$$

よって，$s=t=-1$ から $Z=-X-Y$ となり，$X+Y+Z=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ である。

(4) (3)から，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となり,

$$1+\cos\theta+\cos\varphi=0 \text{ ………⑥},\quad \sin\theta+\sin\varphi=0 \text{ ………⑦}$$

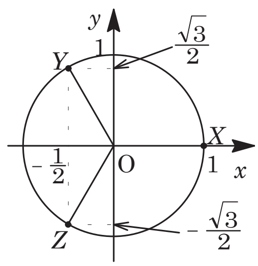
⑥⑦より，$(-1-\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2=1$，$1+2\cos\theta=0$

よって，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ から，$\theta=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ である。

(i) $\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき

⑥より $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$，⑦より $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので，$\varphi=\frac{4}{3}\pi$

である。



①②より，$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$

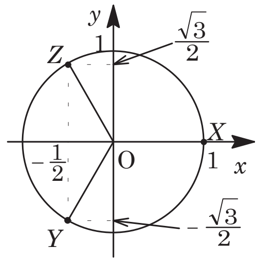
$$A\begin{pmatrix}2&-1\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\ \sqrt{3}&-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

ここで，$\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=2\sqrt{3}$ より，$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}$ は存在し，

$$A=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ \sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -3\\ 3 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

(ii)　$\theta=\frac{4}{3}\pi$ のとき

⑥より $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$，⑦より $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので，$\varphi=\frac{2}{3}\pi$ である。



①②より，$A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -\sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

ここで，$\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}=-2\sqrt{3}$ より，$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}$ は存在し，

$$A=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -\sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -3\\ 3 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

［解 説］

20 年以上も前，1 次変換の全盛期に，京大や奈良女子大で「1 次変換の線形性」を問う問題として，類題が出されています。初見であれば，演習しておきたい 1 題です。

5

問題のページへ

(1)　曲線 $y=e^x$ 上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ に対して，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$

ここで，$|\vec{v}|=1$ から，$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=1$ なので，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+e^{2x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=1,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{1+e^{2x}}$$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

よって，$x=s$ において，$\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}(1,\ e^s)$

(2)　(1)より，$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+e^{2x}}\left(e^x\sqrt{1+e^{2x}}-e^x\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$=\frac{e^x(1+e^{2x})-e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}$$

よって，$x=s$ において，$\vec{\alpha}=\dfrac{1}{(1+e^{2s})^2}(-e^{2s},\ e^s)$

(3)　(2)より，$|\vec{\alpha}|^2=\dfrac{1}{(1+e^{2s})^4}(e^{4s}+e^{2s})=\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^4}(e^{2s}+1)=\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^3}$

ここで, $u>0$ に対して，$f(u)=\dfrac{u}{(1+u)^3}$ とおくと，$|\vec{\alpha}|^2=f(e^{2s})$ であり，

$$f'(u)=\frac{(1+u)^3-u\cdot 3(1+u)^2}{(1+u)^6}=\frac{-2u+1}{(1+u)^4}$$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$		$+$	0	$-$
$f(u)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$

右表より，$f(u)$ は $u=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{4}{27}$ をとり，

これより，$|\vec{\alpha}|$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{4}{27}}=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ である。

［解　説］

大学入試ではあまり見かけない速度，加速度を題材とした問題です。合成関数の微分法がポイントです。