**1**

解答解説のページへ

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{CP}^2$ を $a, b, c, t$ を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき, $t$ を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう 1 回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする。この取り決めによって，2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。

**3**

解答解説のページへ

$xy$ 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を $C$ とし，その両端を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする。$C$ 上の 2 点 M，N を $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ となるようにとる。ただし，$\mathrm{N}\neq\mathrm{B}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{MAB}=\theta$ とおくとき，弦の長さ MB および点 M の座標を $\theta$ を用いて表せ。

(2) 点 N から $x$ 軸におろした垂線を NP としたとき，PB を $\theta$ を用いて表せ。

(3) $t=\sin\theta$ とおく。条件 $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ を $t$ を用いて表せ。

(4) $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となるような点 M がただ一つあることを示せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

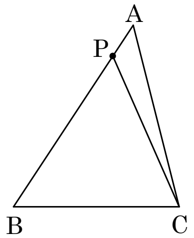
以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1) 和$1+2+\cdots+n$を$n$の多項式で表せ。

(2) 和$1^2+2^2+\cdots+n^2$を$n$の多項式で表せ。

(3) 和$1^3+2^3+\cdots+n^3$を$n$の多項式で表せ。

**1**　　問題のページへ




(1)　余弦定理から，$\cos\angle A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ となり，

$$
\begin{aligned}
CP^2&=b^2+t^2c^2-2btc\cos\angle A\\
&=b^2+t^2c^2-t(b^2+c^2-a^2)\\
&=ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2
\end{aligned}
$$

(2)　$CP=a$ のとき, (1)より，$ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2=a^2$

$$(1-t)(-a^2+b^2-tc^2)=0$$

すると, $t\geqq 0$ から, $b\geqq a$ のとき $t=1,\ \dfrac{-a^2+b^2}{c^2}$，$b<a$ のとき $t=1$ である。

(3)　$t$ の値が $0\leqq t\leqq 1$ に 2 つ存在する条件は, $b\geqq a$ のとき $0\leqq\dfrac{-a^2+b^2}{c^2}<1$ より,

$b\geqq a$………①，$b^2<a^2+c^2$………②

①より $\angle B\geqq\angle A$, ②より $\angle B<90°$

まとめると，$\angle A\leqq\angle B<90°$ となる。

［解 説］

三角比の応用についての基本問題です。

**2**

問題のページへ

(1)　1 回目，2 回目に出た目と得点の対応関係をまとめると，右表のようになる。

| 1回＼2回 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 0 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

サイコロを 2 回振るときの得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}$$

$$=\frac{70}{36}=\frac{35}{18}$$

(2)　最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとするとき，得点が 6 となる確率は，$\frac{5}{36}+\frac{1}{6}$ となることより，このときの得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\left(\frac{5}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{106}{36}=\frac{53}{18}$$

(3)　最初の目が 5 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\left(\frac{4}{36}+\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{4}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{130}{36}$$

最初の目が 4 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\left(\frac{3}{36}+\frac{1}{6}\right)+5\times\left(\frac{3}{36}+\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{3}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{143}{36}$$

最初の目が 3 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\right)+4\times\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\right)+5\times\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{146}{36}$$

最初の目が 2 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$2\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)+3\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)+4\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)+5\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{140}{36}$$

最初がいずれの目であっても 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}=\frac{126}{36}$$

以上より，得点の期待値が最大となるのは，最初の目が 3 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合である。

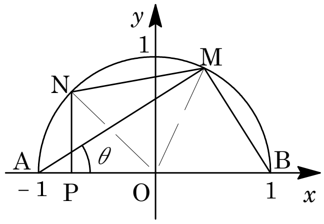
すなわち，最初の目が 1 または 2 のときに 2 回目を振るとよい。

［解　説］

(1)と(2)の設設問に続いて, 7 通りの場合をすべて数値計算した直感的な解法です。

**3**

問題のページへ




(1)　NM = MB より，点 M は BN の垂直二等分線上にあり，$\angle \mathrm{AMB}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{MB}=\mathrm{AB}\sin\theta=2\sin\theta$$

また，$\angle\mathrm{MOB}=2\theta$ から，$\mathrm{M}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

(2)　$\angle\mathrm{NOB}=4\theta$ から，$\mathrm{N}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$

よって，$\mathrm{P}(\cos 4\theta,\ 0)$ より，$\mathrm{PB}=1-\cos 4\theta$

(3)　MB = PB より，$2\sin\theta=1-\cos 4\theta$ となり，

$$1-\cos 4\theta=2\sin^2 2\theta=8\sin^2\theta\cos^2\theta=8\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$

これから，$t=\sin\theta$ とおくと，$2t=8t^2(1-t^2)$ ………①

ここで，$0^\circ<4\theta\leqq 180^\circ$ $(0^\circ<\theta\leqq 45^\circ)$ から，$0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，①は,

$$1=4t(1-t^2),\ \ 4t^3-4t+1=0\ \text{………②}$$

(3)　$f(t)=4t^3-4t+1$ とおくと,

$$f'(t)=12t^2-4=4(3t^2-1)$$

$0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，②を満たす $t$ はただ一つ存在する。このとき，$t=\sin\theta$ から，$\theta$ すなわち点 M はただ一つ存在する。

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $1$ | ↘ | | ↗ | $1-\sqrt{2}$ |

［解　説］

丁寧な誘導のついた問題です。ただ，それが行き過ぎて，(1)と(2)は不気味です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) $S_1 = 1+2+\cdots+n$ とおくと，$2S_1 = (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) = n(n+1)$

よって，$S_1 = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

(2) $S_2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2$ とおくと，

$$S_1+S_2 = \sum_{k=1}^{n}(k+k^2) = \sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$
$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

よって，$S_2 = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \dfrac{1}{2}n(n+1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+4)-3\}$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3) $S_3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$ とおくと，

$$2S_1+3S_2+S_3 = \sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2+k^3) = \sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$
$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

よって，$S_3 = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1) - 3\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{(n^2+5n+6)-4-2(2n+1)\}$$
$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

［解 説］

連続自然数の和の知識をもとにした証明です。