1

解答解説のページへ

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき, t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，∠A と∠B に関する条件を求めよ。

2

解答解説のページへ

次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう 1 回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする。この取り決めによって，2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1)　競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2)　競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3)　得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。

3

解答解説のページへ

xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

中心が$(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点$(0,\ 0)$を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が 1 回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2)の曲線の長さを求めよ。

5

解答解説のページへ

実数を成分とする 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

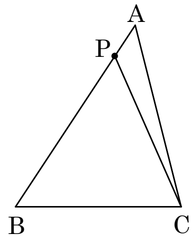
(1) P が放物線 $y=x^2$ 全体の上を動くとき，Q が放物線 $9X=2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき，行列 A を求めよ。

(2) P が放物線 $y=x^2$ 全体の上を動くとき，Q は常に円 $X^2+(Y-1)^2=1$ の上にあるという。このとき，行列 A を求めよ。

(3) P が放物線 $y=x^2$ 全体の上を動くとき，Q がある直線 L 全体の上を動くための a，b，c，d についての条件を求めよ。また，その条件が成り立っているとき，直線 L の方程式を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　余弦定理から，$\cos\angle A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ となり，

$$\begin{aligned}CP^2 &= b^2+t^2c^2-2btc\cos\angle A\\ &= b^2+t^2c^2-t(b^2+c^2-a^2)\\ &= ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2\end{aligned}$$

(2)　$CP=a$ のとき, (1)より，$ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2=a^2$

$$(1-t)(-a^2+b^2-tc^2)=0$$

すると, $t\geqq 0$ から, $b\geqq a$ のとき $t=1,\ \dfrac{-a^2+b^2}{c^2}$，$b<a$ のとき $t=1$ である。

(3)　t の値が $0\leqq t\leqq 1$ に 2 つ存在する条件は, $b\geqq a$ のとき $0\leqq \dfrac{-a^2+b^2}{c^2}<1$ より,

$b\geqq a$………①，$b^2<a^2+c^2$………②

①より $\angle B\geqq\angle A$, ②より $\angle B<90^\circ$

まとめると，$\angle A\leqq\angle B<90^\circ$ となる。

［解　説］

三角比の応用についての基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　1 回目，2 回目に出た目と得点の対応関係をまとめると，右表のようになる。

1回＼2回	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	0
3	4	5	6	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

サイコロを 2 回振るときの得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}$$

$$=\frac{70}{36}=\frac{35}{18}$$

(2)　最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとするとき，得点が 6 となる確率は，$\dfrac{5}{36}+\dfrac{1}{6}$ となることより，このときの得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\left(\frac{5}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{106}{36}=\frac{53}{18}$$

(3)　最初の目が 5 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\left(\frac{4}{36}+\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{4}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{130}{36}$$

最初の目が 4 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\left(\frac{3}{36}+\frac{1}{6}\right)+5\times\left(\frac{3}{36}+\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{3}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{143}{36}$$

最初の目が 3 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\right)+4\times\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\right)+5\times\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{146}{36}$$

最初の目が 2 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$2\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)+3\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)+4\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)+5\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\right)=\frac{140}{36}$$

最初がいずれの目であっても 2 回目を振らないとする場合の得点の期待値は,

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}=\frac{126}{36}$$

以上より，得点の期待値が最大となるのは，最初の目が 3 以上のときだけ 2 回目を振らないとする場合である。

すなわち，最初の目が 1 または 2 のときに 2 回目を振るとよい。

［解　説］

(1)と(2)の設問に続いて，7 通りの場合をすべて数値計算した直感的な解法です。

3

問題のページへ

(1)　$y=\dfrac{1}{x^2}$ に対して，$y'=-\dfrac{2}{x^3}$ となり，点 $\mathrm{Q_1}\left(b,\ \dfrac{1}{b^2}\right)$

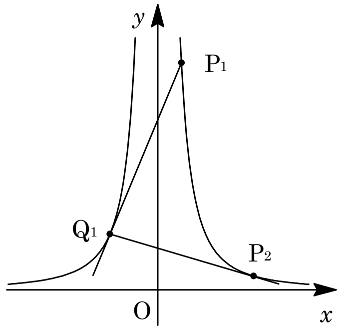
における接線の方程式は,

$$y-\frac{1}{b^2}=-\frac{2}{b^3}(x-b),\quad y=-\frac{2}{b^3}x+\frac{3}{b^2}$$

点 $\mathrm{P_1}\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$を通ることより，$\dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{2}{b^3}a+\dfrac{3}{b^2}$

$$b^3-3a^2b+2a^3=0,\quad (b-a)^2(b+2a)=0$$

$b\neq a$ より，$b=-2a$ となり，$\mathrm{Q_1}\left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right)$となる。



(2)　(1)と同様にすると，$\mathrm{P_2}$ は x 座標が $(-2)^2a=4a$ から，$\mathrm{P_2}\left(4a,\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}=\left(-3a,\ -\frac{3}{4a^2}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=\left(3a,\ -\frac{15}{16a^2}\right)$$

すると，$\triangle\mathrm{P_1Q_1P_2}$ の面積 S_1 は,

$$S_1=\frac{1}{2}\left|(-3a)\left(-\frac{15}{16a^2}\right)-\left(-\frac{3}{4a^2}\right)\cdot 3a\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{45}{16a}+\frac{9}{4a}\right|=\frac{81}{32a}$$

(3)　$\mathrm{P}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$，$\mathrm{Q}_n\left(b_n,\ \dfrac{1}{{b_n}^2}\right)$とおくと, (1)と同様にして,

$$a_n=4^{n-1}a_1=4^{n-1}a,\quad b_n=4^{n-1}b_1=4^{n-1}\cdot(-2a)=-2\cdot 4^{n-1}a$$

(2)の結果を用いると，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n は,

$$S_n=\frac{81}{32(4^{n-1}a)}=\frac{81}{2a}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

(4)　等比数列$\{S_n\}$の公比は$\dfrac{1}{4}$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束し,

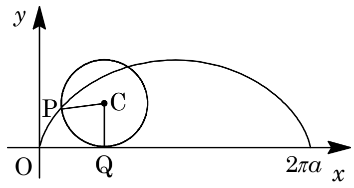
$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{81}{32a}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{27}{8a}$$

［解 説］

無限等比級数の応用問題です。誘導を利用して, 計算量を減少させることがポイントです。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$とし，半径 a の円と x 軸の接点を Q とおくと，線分 OQ の長さと弧 PQ の長さが等しいことより，$\mathrm{Q}(at,\ 0)$ となる。すると，円の中心は，$\mathrm{C}(at,\ a)$である。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$は$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$を$-t$だけ回転したものより，

$$\begin{pmatrix} x-at \\ y-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

よって，$x-at=-a\sin t$，$y-a=-a\cos t$

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

(2)　曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2\pi=3\pi a^2$$

(3)　曲線 C の長さを L とすると，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

よって，$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$

［解　説］

サイクロイドについての基本的な問題です。しかし，なぜ弧長の設問もあるのかは不明です。

5

問題のページへ

(1)　t を任意の実数として，放物線 $y=x^2$ 上の任意の点Pを $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とおく。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} at+bt^2 \\ ct+dt^2 \end{pmatrix}$$

すると，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は，$X=at+bt^2$，$Y=ct+dt^2$ ……(＊)となる。

さて，$9X=2Y^2$ より，(＊)を代入して，$9(at+bt^2)=2(ct+dt^2)^2$

$$2d^4t^4+4cdt^3+(2c^2-9b)t^2-9at=0$$

任意の t に対して成立する条件は，

$$d^4=0 \cdots\cdots ①,\ cd=0 \cdots\cdots ②,\ 2c^2-9b=0 \cdots\cdots ③,\ a=0 \cdots\cdots ④$$

①④より，$a=d=0$ となり，②は満たされる。また，③より $b=\frac{2}{9}c^2$

また，(＊)から $Y=ct$ であり，Y がすべての実数値をとる条件は，$c\neq 0$ となり，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9}c^2 \\ c & 0 \end{pmatrix}\ (c\neq 0)$$

(2)　$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は $X^2+(Y-1)^2=1$，すなわち $X^2+Y^2-2Y=0$ を満たす。

(＊)を代入して，$(at+bt^2)^2+(ct+dt^2)^2-2(ct+dt^2)=0$

$$(b^2+d^2)t^4+2(ab+cd)t^3+(a^2+c^2-2d)t^2-2ct=0$$

任意の t に対して成立する条件は，

$$b^2+d^2=0 \cdots\cdots ⑤,\ ab+cd=0 \cdots\cdots ⑥,\ a^2+c^2-2d=0 \cdots\cdots ⑦,\ c=0 \cdots\cdots ⑧$$

⑤⑧より，$b=c=d=0$ となり，⑥は満たされる。また，⑦より $a=0$

よって，$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3)　まず，放物線 $y=x^2$ 上の原点は原点にうつされる。これより，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ の動く直線 L は原点を通る。

これより，L の方程式は，$Y=mX$ または $X=0$ と表せる。

(i)　$L:Y=mX$ のとき

(＊)を代入して，$ct+dt^2=m(at+bt^2)$

$$(bm-d)t^2+(am-c)t=0$$

任意の t に対して成立する条件は，

$$bm-d=0 \cdots\cdots ⑨,\ am-c=0 \cdots\cdots ⑩$$

⑨より $d=bm$，⑩より $c=am$

また，(＊)から，$X=at+bt^2$ がすべての実数値をとる条件は，$a\neq 0$，$b=0$ である。

よって，求める条件は，$a\neq 0$，$b=d=0$ であり，このとき，

$$L:Y=\frac{c}{a}X$$

(ii)　$L : X = 0$ のとき

$(*)$を代入して，$at + bt^2 = 0$

任意の t に対して成立する条件は,

$$a = b = 0$$

また，$(*)$から，$Y = ct + dt^2$ がすべての実数値をとる条件は，$c \neq 0$，$d = 0$ である。

よって，求める条件は，$c \neq 0$，$a = b = d = 0$ であり，このとき，

$$L : X = 0$$

［解　説］

1 次変換の問題です。(3)は退化する場合ですが，問題文のアンダーラインの意味は,「半直線にならない条件を求めなさい」ということでしょう。