1

解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。

(3) $x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(4) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列a_1，a_2，…，a_n，… は

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-{a_n}^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ。

(2)　$\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3)　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{7}$ とする。$a_k=a_1$ を満たす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=10$ となることを示せ。

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ を満たす点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ, 以下の操作を考える。

操作 : 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば, i のカードと j のカードを入れかえる。その後, 2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ, 上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて, 以下の問いに答えよ。

(1) カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。

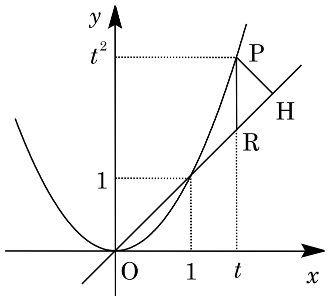
(2) カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) 左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) 左端のカードの数字の期待値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y=x$ ……①

への垂線の方程式は,

$$y-t^2=-(x-t),\quad y=-x+t^2+t\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $x=-x+t^2+t$, $x=y=\dfrac{t^2+t}{2}$

よって, 点 H の座標は, $\left(\dfrac{t^2+t}{2},\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$である。

(2)　$t>1$ から, 点 P と直線①の距離は,

$$\mathrm{PH}=\frac{|t-t^2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{t^2-t}{\sqrt{2}}$$

三角形 PRH は直角二等辺三角形より, その面積 S_0 は,

$$S_0=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-t}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}t^2(t-1)^2$$

(3)　放物線 $y=x^2$, 直線 $y=x$, 線分 PH で囲まれた図形の面積 S_1 は,

$$S_1=\int_1^t(x^2-x)dx+S_0=\frac{1}{3}(t^3-1)-\frac{1}{2}(t^2-1)+\frac{1}{4}t^2(t-1)^2$$
$$=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}$$

(4)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積 S_2 は,

$$S_2=\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$ より, $\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$ となり, $t^2(3t^2-2t-3)=0$

$t>1$ から, $t=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

［解　説］

放物線を題材にした図形の基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から，$a_2=\dfrac{2a_1}{1-{a_1}^2}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$ となり，

$$a_3=\frac{2a_2}{1-{a_2}^2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3}\,,\ \ a_4=\frac{2a_3}{1-{a_3}^2}=\frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-3}=\sqrt{3}$$

これより，帰納的に，

$$a_2=a_4=a_6=a_8=a_{10}=\sqrt{3}\,,\ \ a_3=a_5=a_7=a_9=a_{11}=-\sqrt{3}$$

(2)　$x=\tan\dfrac{\pi}{12}$ とおくと，2 倍角の公式より，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2x}{1-x^2}$ となり，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2x}{1-x^2}\,,\ \ 1-x^2=2\sqrt{3}x\,,\ \ x^2+2\sqrt{3}x-1=0$$

$x>0$ より，$x=-\sqrt{3}+2$

(3)　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{7}$ とするとき，2 倍角の公式より，$a_2=\tan\dfrac{2}{7}\pi$，$a_3=\tan\dfrac{4}{7}\pi$，…となり，帰納的に，$a_k=\tan\dfrac{2^{k-1}}{7}\pi$ である。

ここで，$k\geqq 2$ において，$a_k=a_1$ より，n を自然数として，

$$\frac{2^{k-1}}{7}\pi=\frac{\pi}{7}+n\pi\,,\ \ 2^{k-1}=1+7n\cdots\cdots\cdots(*)$$

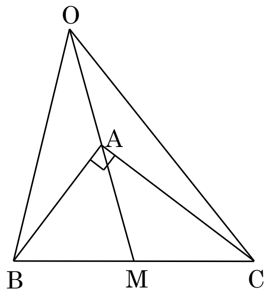
$(*)$を満たす k が最小となるのは，$n=1$ のとき $k=4$ である。

［解 説］

タンジェントの 2 倍角の公式がもとになっていますので，(2)もそれに対応した方法にしましたが，$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ とするのが普通です。なお，(1)と(3)は，ともに証明を省いています。

3

問題のページへ



(1)　条件より，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ ………①

また，辺 BC の中点を M とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2} \text{………②}$$

①②より，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

よって，点 A は線分 OM の中点となる。

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ から，$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=1$

すると，(1)より $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=2$ となり，△OBC に中線定理を適用して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=2(|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2)=10 \text{………③}$$

(3)　条件より，$4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ を変形すると，

$$4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=-4$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ および③から，

$$4(1-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2)-(10-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2)=-4$$

$$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2$$

①より，$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=2$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ である。

［解　説］

誘導に従えば，テクニカルな変形が不要であるように問題が構成されています。

4

問題のページへ

(1)　4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りの場合が同様に確からしいとし，この操作を 2 回繰り返すとする。

さて，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶのは，1 回目に i と j を取り出したとき，2 回目も i と j を取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 6=\frac{1}{6}$$

(2)　カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶのは，1 回目に 1 と 4 を取り出し 2 回目に 2 と 3 を取り出す場合か，1 回目に 2 と 3 を取り出し 2 回目に 1 と 4 を取り出す場合のいずれかなので，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{18}$$

(3)　左端のカードの数字が 1 になるのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　2 と 3, 2 と 4, 3 と 4 のいずれかを 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3^2=\dfrac{9}{36}$

(ii)　1 と 2 を 2 回，または 1 と 3 を 2 回，または 1 と 4 を 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3=\dfrac{3}{36}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{9}{36}+\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{3}$

(4)　左端のカードの数字が 2, 3, 4 になることは対等なので，(3)より，その確率はそれぞれ，$\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$ である。

よって，左端のカードの数字の期待値 E は，

$$E=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{2}{9}=\frac{7}{3}$$

［解　説］

形式を変えて，センター試験にそのまま出題されても不思議ではない確率の基本問題です。なお, (3)は，1 のカードが動かない場合と動く場合で分けています。