1

解答解説のページへ

曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) $x\geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) $x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値 $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$ を求めよ。

(3) k を定数とする。$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

数列a_1，a_2，…，a_n，… は

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-{a_n}^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項a_nを求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき，$a_{n+k}=a_n$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ を満たす最小の自然数 k を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(0, 2, 3), B(1, 0, 3), C(1, 2, 0) を考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2) 3 点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き, 交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) $n=2$ のとき，カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。

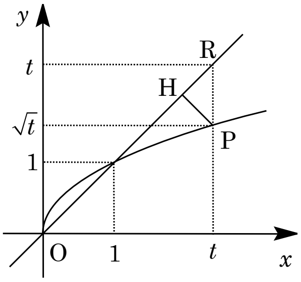
(2) $n=2$ のとき，カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) $n=2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) $n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ ……①への垂線の方程式は,

$$y-\sqrt{t}=-(x-t),\quad y=-x+t+\sqrt{t}\ \cdots\cdots②$$

①②より, $x=-x+t+\sqrt{t}$, $x=y=\dfrac{t+\sqrt{t}}{2}$

よって, 点 H の座標は, $\left(\dfrac{t+\sqrt{t}}{2},\ \dfrac{t+\sqrt{t}}{2}\right)$である。

(2)　$t>1$ から, 点 P と直線①の距離は,

$$\mathrm{PH}=\frac{|t-\sqrt{t}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}$$

ここで, $\mathrm{R}(t,\ t)$ とおくと, $\triangle\mathrm{PRH}$ は直角二等辺三角形となり, 曲線 $y=\sqrt{x}$, 直線 $y=x$, 線分 PH とで囲まれた図形の面積 S_1 は,

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}(1+t)(t-1)-\int_1^t\sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)^2\\&=\frac{1}{2}(t^2-1)-\frac{2}{3}(t\sqrt{t}-1)-\frac{1}{4}(t^2-2t\sqrt{t}+t)\\&=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t\sqrt{t}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(3)　曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積 S_2 は,

$$S_2=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$ より, $\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{6}t\sqrt{t}-\dfrac{1}{4}t+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$ となり, $t(3t-2\sqrt{t}-3)=0$

$t>1$ から $\sqrt{t}>1$ なので, $\sqrt{t}=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ となり, $t=\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}$

［解　説］

定積分の計算をなるべく回避し, 三角形や台形の面積公式を利用して, 計算を進めています。なお, 内容は文系と同じです。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ に対して,

$$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=-(x^2-a^2)e^{-x}$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，極大値は $f(a)=(2a+2)e^{-a}$，極小値は $f(-a)=(-2a+2)e^{a}$ である。

(2)　$x\geqq 3$ のとき，$g(x)=27e^{-3}-x^3e^{-x}$ とおく。

$$g'(x)=-3x^2e^{-x}+x^3e^{-x}=x^2(x-3)e^{-x}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(3)=0$ となり，$x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$ が成立する。

すると，$0<x^2e^{-x}\leqq\dfrac{27e^{-3}}{x}$ から，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$

(3)　$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフの共有点の個数は,

$$x^2+2x+2=ke^x+a^2,\ (x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=k$$

よって，$f(x)=k$ の異なる実数解の個数に一致し，さらに，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの共有点の個数に等しい。

そして，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ であり，また(2)より,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\Big(1+\frac{2}{x}+\frac{2-a^2}{x^2}\Big)x^2e^{-x}=0$$

これより，極小値の符号で場合分けをして,

(i)　$(-2a+2)e^{a}>0$　$(0<a<1)$ のとき

$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフが異なる 3 点で交わる条件は,

$$(-2a+2)e^{a}<k<(2a+2)e^{-a}$$

(ii)　$(-2a+2)e^{a}\leqq 0$　$(a\geqq 1)$ のとき

$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフが異なる 3 点で交わる条件は,

$$0<k<(2a+2)e^{-a}$$

［解 説］

誘導が非常に細かい問題です。誘導がなく，(3)のみの出題でも完答できることが望まれます。

3

問題のページへ

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から，$a_2=\dfrac{2a_1}{1-{a_1}^2}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3}$ となり，

$$a_3=\frac{2a_2}{1-{a_2}^2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3}\ ,\ \ a_4=\frac{2a_3}{1-{a_3}^2}=\frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-3}=\sqrt{3}$$

これより, k を自然数として，帰納的に,

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ a_n=\sqrt{3}\ (n=2k\text{のとき}),\ \ a_n=-\sqrt{3}\ (n=2k+1\text{のとき})$$

(2)　$x=\tan\dfrac{\pi}{12}$ とおくと, 2 倍角の公式より，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2x}{1-x^2}$ となり，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2x}{1-x^2}\ ,\ \ 1-x^2=2\sqrt{3}x\ ,\ \ x^2+2\sqrt{3}x-1=0$$

$x>0$ より，$x=-\sqrt{3}+2$

(3)　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき, 2 倍角の公式より，$a_2=\tan\dfrac{2}{20}\pi$ ，$a_3=\tan\dfrac{4}{20}\pi$ ，…となり, 帰納的に，$a_n=\tan\dfrac{2^{n-1}}{20}\pi$ である。

ここで, $n\geqq 3$ において，$a_{n+k}=a_n$ より, l を自然数として,

$$\frac{2^{n+k-1}}{20}\pi=\frac{2^{n-1}}{20}\pi+l\pi\ ,\ \ 2^{n+k-3}=2^{n-3}+5l\ ,\ \ 2^{n-3}(2^k-1)=5l\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$n=3$ のとき $2^{n-3}=1$，$n\geqq 4$ のとき 2^{n-3} は偶数なので, $(*)$から，2^k-1 は 5 の倍数となり，自然数 k の最小値は 4 である。

このとき, $(*)$は，$15\cdot 2^{n-3}=5l$, すなわち $l=3\cdot 2^{n-3}$ となる。

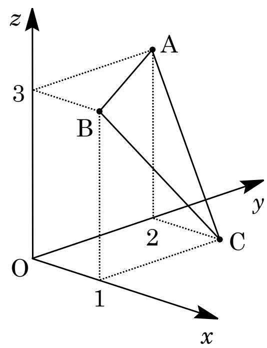
よって，$a_{n+k}=a_n$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ を満たす最小の自然数 k は 4 である。

［解 説］

タンジェントの 2 倍角の公式がもとになっていますので, (2)もそれに対応した方法にしましたが，$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ とするのが普通です。なお, (1)と(3)は，ともに証明を省いています。また, 文系に類題があります。

4

問題のページへ



(1)　4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D を，$\mathrm{D}(p,\ q,\ r)$ とすると，$\mathrm{OD}=\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}$ から,

$$p^2+q^2+r^2=p^2+(q-2)^2+(r-3)^2\cdots\cdots\cdots①$$
$$p^2+q^2+r^2=(p-1)^2+q^2+(r-3)^2\cdots\cdots\cdots②$$
$$p^2+q^2+r^2=(p-1)^2+(q-2)^2+r^2\cdots\cdots\cdots③$$

①より，$-4q+4-6r+9=0\cdots\cdots\cdots①'$

②より，$-2p+1-6r+9=0\cdots\cdots\cdots②'$

③より，$-2p+1+4q-4=0\cdots\cdots\cdots③'$

①′ ②′ ③′ から，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=1$，$r=\dfrac{3}{2}$ となり，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ である。

(2)　平面 ABC の方程式は，法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおき，$\mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$ を通ることを用いて立式すると,

$$a(x-1)+b(y-2)+cz=0\cdots\cdots\cdots④$$

$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 3)$ を通ることより，$-a+3c=0\cdots\cdots\cdots⑤$

$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 3)$ を通ることより，$-2b+3c=0\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より，$\vec{n}=(a,\ b,\ c)=\left(3c,\ \dfrac{3}{2}c,\ c\right)=\dfrac{c}{2}(6,\ 3,\ 2)$ となり，④から,

$$6(x-1)+3(y-2)+2z=0,\ 6x+3y+2z-12=0$$

これより，点 D から平面 ABC への垂線 DF の長さは,

$$\mathrm{DF}=\frac{\left|6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot1+2\cdot\frac{3}{2}-12\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{3}{7}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(-1,\ 0,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -2,\ 3)$ より，△ABC の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(1+9)(4+9)-9^2}=\frac{7}{2}$$

よって，四面体 ABCD の体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{DF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{2}$$

［解　説］

平面の方程式や点と平面の距離の公式を用いた解答例です。九大では，昨年，現行課程の範囲外である弧長の問題も出ていますので，京大対策と同様に，拡張した知識も仕入れておいた方がよいでしょう。なお，空間図形の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

5

問題のページへ

(1)　4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す ${}_4C_2=6$ 通りの場合が同様に確からしいとし，この操作を 2 回繰り返すとする。

　さて，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶのは，1 回目に i と j を取り出したとき，2 回目も i と j を取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 6=\frac{1}{6}$$

(2)　操作を 2 回繰り返すとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶのは，1 回目に 1 と 4 を取り出し 2 回目に 2 と 3 を取り出す場合か，1 回目に 2 と 3 を取り出し 2 回目に 1 と 4 を取り出す場合のいずれかなので，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{18}$$

(3)　操作を 2 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，

(i)　2 と 3，2 と 4，3 と 4 のいずれかを 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 3^2=\frac{9}{36}$

(ii)　1 と 2 を 2 回，または 1 と 3 を 2 回，または 1 と 4 を 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 3=\frac{3}{36}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{9}{36}+\frac{3}{36}=\frac{1}{3}$

(4)　操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，(3)と同様に，

(i)　2 回の操作の後，左端が 1 の場合

3 回目に 1 以外の 2 つの数を取り出すことより，その確率は，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\times 3\right)=\frac{1}{6}$

(ii)　2 回の操作の後，左端が 1 でない場合

3 回目に左端の数と 1 を取り出すことより，その確率は，$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

(i)(ii)より，左端のカードの数字が 1 の確率は，$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$

　また，操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 2，3，4 になることは対等なので，その確率はそれぞれ，$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{5}{18}\right)=\frac{13}{54}$ である。

　よって，操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字の期待値 E は，

$$E=1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{13}{54}+3\times\frac{13}{54}+4\times\frac{13}{54}=\frac{22}{9}$$

［解　説］

　最後の(4)だけが，文系と別問題です。なお，(3)と(4)は，1 のカードが動かないときと動くときに場合を分けています。