1　解答解説のページへ

原点を O とする座標空間に, 3 点 A(1, 0, 0), B(0, 0, 2), C(−2, 1, 3) がある。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) △ABC において, ∠B は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。

(2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

(3) △OAH の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし $p<q$）。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。

3

解答解説のページへ

100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした。以下の問いに答えよ。

(1) x が 0 以上の整数であるとき，次のことを示せ。

$\frac{1}{3}(100-7x)$ は，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，それ以外の場合は整数ではない。

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする。このとき，セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。

(3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき，A のみ，あるいは B のみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A，B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。

4

解答解説のページへ

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1)　試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2)　試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{C}(-2,\ 1,\ 3)$ に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(1,\ 0,\ -2),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 1,\ 1)$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-2+0-2=-4<0$ となり，$\angle\mathrm{ABC}>\dfrac{\pi}{2}$ である。

(2)　点 H は直線 BC 上にあることより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ 0,\ 2)+t(-2,\ 1,\ 1)=(-2t,\ t,\ 2+t)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-2t-1,\ t,\ 2+t)$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-2(-2t-1)+t+(2+t)=6t+4=0$$

よって，$t=-\dfrac{2}{3}$ となり，$(*)$から，$\mathrm{H}\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ である。

(3)　点 H から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点 I は，$\mathrm{I}\left(\dfrac{4}{3},\ 0,\ 0\right)$ となるので,

$$\triangle\mathrm{OAH}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{HI}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

［解　説］

空間ベクトルについての基本問題です。

$\boxed{2}$

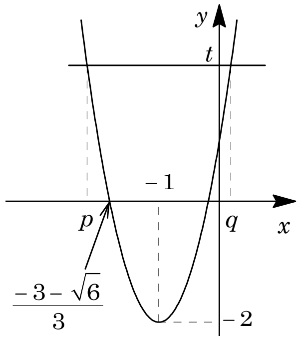
問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+3x^2+x-1$ に対して,

$$f'(x)=3x^2+6x+1$$

ここで, $t\geqq 0$ のとき, $f'(x)=t$ とすると,

$$3x^2+6x+1=t,\ 3(x+1)^2-2=t\ \cdots\cdots\cdots①$$



右図より, ①は異なる 2 つの実数解をもつことより, 接点が 2 個, すなわち接線が 2 本存在する。

(2)　①の解が $x=p,\ q\ (p<q)$ なので,

$$p+q=-\frac{6}{3}=-2\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$f(p)+f(p)=p^3+3p^2+p-1+q^3+3q^2+q-1$$
$$=(p+q)^3-3pq(p+q)+3(p+q)^2-6pq+(p+q)-2$$

②より, $f(p)+f(p)=-8+6pq+12-6pq-2-2=0$

よって, $\dfrac{p+q}{2}=-1$, $\dfrac{f(p)+f(p)}{2}=0$ となり, $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にある。

(3)　$p\leqq\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$ として, $\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+(p^3+3p^2+p-1)^2$

ここで, $u=(p+1)^2$ とおくと, $p+1\leqq-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ から, $u\geqq\dfrac{2}{3}$ となり,

$$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+\left\{(p+1)^3-2(p+1)\right\}^2=u+u(u-2)^2=u^3-4u^2+5u$$

$g(u)=u^3-4u^2+5u$ とおくと,

$$g'(u)=3u^2-8u+5$$
$$=(3u-5)(u-1)$$

u	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(u)$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

すると, $g(u)$ の増減は右表のようになり, $u=\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}$ で最小値 $\dfrac{50}{27}$ をとる。

さて, (2)より, $\mathrm{PQ}=2\mathrm{PA}=2\sqrt{g(u)}$ となるので, PQ の最小値は,

$$2\sqrt{\frac{50}{27}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{9}$$

$u=\dfrac{2}{3}$ では, $p=-1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$, ②より, $q=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

$u=\dfrac{5}{3}$ では, $p=-1-\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$, ②より, $q=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$

［解　説］

(3)の変数の置き換えは, 2 段階だったものを, まとめて記しています。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1) x が 0 以上の整数であるとき，

$$y=\frac{1}{3}(100-7x)=\frac{1}{3}(3\times 33+1-3\cdot 2x-x)=33-2x-\frac{x-1}{3}$$

よって，y は $x-1$ が 3 で割り切れるときのみ整数となる。すなわち，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，それ以外の場合は整数ではない。

(2) A を x セット，B を y セット購入するとき，条件より，

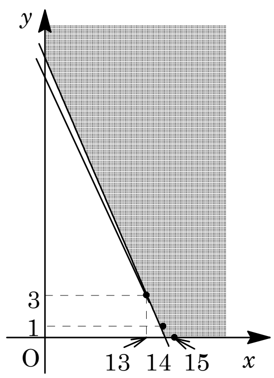
$$7x+3y=100,\ \ y=\frac{1}{3}(100-7x)\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$y\geqq 0$ から $x\leqq\frac{100}{7}=14+\frac{2}{7}$ となり，さらに(1)から，x は 3 で割った余りが 1 である。これより，$x=1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13$

すると，①から，$(x,\ y)=(1,\ 31),\ (4,\ 24),\ (7,\ 17),\ (10,\ 10),\ (13,\ 3)$

(3) (2)と同様にして，

$$7x+3y\geqq 100,\ \ x\geqq 0,\ \ y\geqq 0\cdots\cdots\cdots②$$



②を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

ここで，$k=480x+220y$ とおくと，

$$y=-\frac{24}{11}x+\frac{k}{220}$$

さて，k が最小となる $(x,\ y)$ の組は，右図から，$(x,\ y)=(15,\ 0),\ (14,\ 1),\ (13,\ 3)$ に絞られる。

$(x,\ y)=(15,\ 0)$ のとき $k=7200$，$(x,\ y)=(14,\ 1)$ のとき $k=6940$，$(x,\ y)=(13,\ 3)$ のとき $k=6900$ である。

以上より，購入金額が最も低くなるのは，A が 13 セット，B が 3 セットの場合で，このとき 6900 円である。

［解　説］

(3)では，2 直線の傾きが $-\frac{7}{3}<-\frac{24}{11}$ であるのに注目し，$(x,\ y)=\left(\frac{100}{7},\ 0\right)$ に近い 3 つの格子点についてチェックしています。

4

問題のページへ

(1)　箱Aに黒玉が3個入っているとき，箱Aから2個の玉を取り出して箱Bに入れると，箱Aは黒玉1個，箱Bは黒玉2個と白玉2個になっている。その後，箱Bから2個の玉を取り出して箱Aに入れたとき，箱Aに黒玉が n 個入っている確率 p_n は,

$$p_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6},\quad p_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3},\quad p_3=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

(2)　箱Aに黒玉が2個と白玉が1個入っているとき，試行 T によって箱Aに黒玉が n 個入っている確率を r_n とすると，$r_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{5}{18}$

$$r_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{11}{18},\quad r_3=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{18}$$

また，箱Aに黒玉が1個と白玉が2個入っているとき，試行 T によって箱Aに黒玉が n 個入っている確率を s_n とすると，$s_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{7}{18}$

$$s_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{10}{18},\quad s_3=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{18}$$

これより，試行 T を2回行ったときに，箱Aに黒玉が n 個入っている確率 q_n は,

$$q_1=p_1\cdot s_1+p_2\cdot r_1+p_3\cdot p_1=\frac{7}{108}+\frac{10}{54}+\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$$

$$q_2=p_1\cdot s_2+p_2\cdot r_2+p_3\cdot p_2=\frac{10}{108}+\frac{22}{54}+\frac{4}{36}=\frac{11}{18}$$

$$q_3=p_1\cdot s_3+p_2\cdot r_3+p_3\cdot p_3=\frac{1}{108}+\frac{4}{54}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$$

(3)　試行 T を3回行ったときに，箱Aの中がすべて黒玉になっている確率は,

$$q_1\cdot s_3+q_2\cdot r_3+q_3\cdot p_3=\frac{5}{324}+\frac{22}{324}+\frac{6}{324}=\frac{11}{108}$$

［解　説］

難問ではありませんが，非常に煩雑な問題です。落ち着いて状況を判断し，計算するしか手はありません。