1　解答解説のページへ

円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 次の正方行列 $A,\ B$ はそれぞれ

$$A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$$

を満たすものとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，E は 2 次の単位行列を表すものとする。

(1) 行列 $A,\ B,\ A^2,\ B^2$ を求めよ。

(2) $(AB)^3=E$ であることを示せ。

(3) 行列 A から始めて，B と A を交互に右から掛けて得られる行列

$$A,\ AB,\ ABA,\ ABAB,\ \cdots$$

および行列 B から始めて，A と B を交互に右から掛けて得られる行列

$$B,\ BA,\ BAB,\ BABA,\ \cdots$$

を考える。これらの行列の中で，相異なるものをすべて成分を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

実数 a と自然数 n に対して, x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　この方程式が実数解をもつような a の範囲を, n を用いて表せ。

(2)　この方程式が, すべての自然数 n に対して実数解をもつような a の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α，β をもち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ を満たしているとする。このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3 は整数であることを示せ。

(2)　$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

5

解答解説のページへ

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

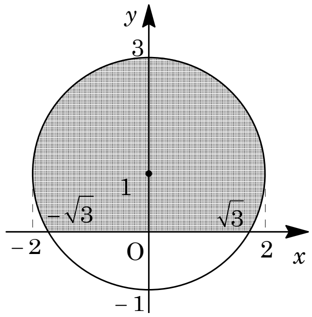
(1)　試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2)　試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

1

問題のページへ



円 $x^2+(y-1)^2=4$ ……(＊)で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は，右図の網点部を x 軸のまわりに回転した立体に等しい。

(＊)から，$y=1\pm\sqrt{4-x^2}$ となり，V_1，V_2 を，

$$V_1=\pi\int_0^2(1+\sqrt{4-x^2})^2dx$$

$$V_2=\pi\int_{\sqrt{3}}^2(1-\sqrt{4-x^2})^2dx$$

すると，求める体積 V は，$V=2(V_1-V_2)$ となる。

さて，$V_1=\pi\int_0^2(5-x^2+2\sqrt{4-x^2})dx$，$V_2=\pi\int_{\sqrt{3}}^2(5-x^2-2\sqrt{4-x^2})dx$ から，

$$\begin{aligned}V_1-V_2&=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx+2\pi\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}\,dx\\&=\pi\Big[5x-\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{3}}+2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{2}+2\pi\Big(\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1\Big)\\&=4\sqrt{3}\pi+2\pi^2+\frac{2}{3}\pi^2-\sqrt{3}\pi=3\sqrt{3}\pi+\frac{8}{3}\pi^2\end{aligned}$$

よって，$V=2\Big(3\sqrt{3}\pi+\frac{8}{3}\pi^2\Big)=6\sqrt{3}\pi+\frac{16}{3}\pi^2$ である。

［解 説］

回転体の体積を求める基本問題です。なお，無理関数の定積分については，図を省いていますが，おうぎ形の面積などを対応させて計算しています。

© 電送数学舎 2012

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}$より, $A\begin{pmatrix}-3&7\\5&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}$となり,

$$A=\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&7\\5&-9\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&-7\\-5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}$$

$B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$より, $B\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-7\\6&10\end{pmatrix}$となり,

$$B=\begin{pmatrix}-5&-7\\6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-5&-7\\6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11&-8\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}$$

また, ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$A^2=(5-5)A-(-25+24)E=E,\ B^2=(6-6)A-(-36+35)E=E$$

(2) $AB=\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&7\\-13&-10\end{pmatrix}$となり,

$$(AB)^3=(AB)^2(AB)=\begin{pmatrix}-10&-7\\13&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&7\\-13&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$$

(3) $BA=\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-7\\13&9\end{pmatrix}=(AB)^2$となり, (1), (2)の結果から, 行列$A$, AB, B, BA, E以外に, 行列Aから始めてBとAを交互に右からかけると,

$$ABA=\begin{pmatrix}9&7\\-13&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&-8\\15&11\end{pmatrix}$$

$$ABAB=(AB)^2=BA,\ ABABA=BAA=B,\ ABABAB=(AB)^3=E$$

よって, これ以降, A, AB, ABA, $ABAB$, $ABABA$, $ABABAB$を繰り返す。

また, 行列Bから始めてAとBを交互に右からかけると,

$$BAB=(AB)^2B=ABABB=ABA,\ BABA=ABAA=AB$$

$$BABAB=ABB=A,\ BABABA=AA=E$$

よって, これ以降, B, BA, BAB, $BABA$, $BABAB$, $BABABA$を繰り返す。

以上より, 求める相異なる行列は, A, AB, B, BA, E, ABAとなり,

$$\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}9&7\\-13&-10\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-10&-7\\13&9\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-11&-8\\15&11\end{pmatrix}$$

［解 説］

行列の計算問題です。単位行列があちこちに現れることに注目すると, 方針が立てやすくなります。

© 電送数学舎 2012

3　問題のページへ

(1)　$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$ ……①に対して，$t=x+1$ とおくと，

$$a\{(t-1)^2+|t|+n-1\}=\sqrt{n}t,\ a(t^2-2t+|t|+n)=\sqrt{n}t \cdots\cdots②$$

(i)　$a=0$ のとき　①は実数解 $x=-1$ をもつ。

(ii)　$a\neq 0$ のとき　①が実数解をもつ条件は，②が実数解をもつ条件に等しい。

②より，$t^2-2t+|t|+n=\dfrac{\sqrt{n}}{a}t$ ………③

③は，$t=0$ を解としてもたないので，$t>0$ のとき，

$$t^2-t+n=\frac{\sqrt{n}}{a}t,\ t-1+\frac{n}{t}=\frac{\sqrt{n}}{a}$$

ここで，$f_1(t)=t-1+\dfrac{n}{t}$　$(t>0)$ とおくと，

$$f_1'(t)=1-\frac{n}{t^2}=\frac{t^2-n}{t^2}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{n}$	$\cdots$
$f_1'(t)$		$-$	0	$+$
$f_1(t)$	∞	$\searrow$	$2\sqrt{n}-1$	$\nearrow$

また，$t<0$ のとき，③は，$t-3+\dfrac{n}{t}=\dfrac{\sqrt{n}}{a}$

$f_2(t)=t-3+\dfrac{n}{t}$　$(t<0)$ とおくと，

$$f_2'(t)=1-\frac{n}{t^2}=\frac{t^2-n}{t^2}$$

t	$\cdots$	$-\sqrt{n}$	$\cdots$	0
$f_2'(t)$	$+$	0	$-$	
$f_2(t)$	$\nearrow$	$-2\sqrt{n}-3$	$\searrow$	$-\infty$

したがって，③が実数解をもつのは，

$$\frac{\sqrt{n}}{a}\geqq 2\sqrt{n}-1 \cdots\cdots④,\ \frac{\sqrt{n}}{a}\leqq -2\sqrt{n}-3 \cdots\cdots⑤$$

④より，$a>0$ のもとで $a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$，⑤より，$a<0$ のもとで $a\geqq-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}$

(i)(ii)より，①が実数解をもつ a の範囲は，$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$ ………⑥

(2)　$n\geqq 1$ のとき $0<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqq 1$ となり，$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}=-\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}$，$\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ から，

$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\leqq-\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}\leqq 1$ である。

よって，⑥がすべての自然数 n に対して成立する条件は，$-\dfrac{1}{5}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

［解 説］

与えられた方程式を定数分離して，グラフをイメージして解いています。その際，絶対値の取り扱いに注意が必要となります。

© 電送数学舎 2012

4

問題のページへ

(1)　$x^2+px+q=0$ が実数解 α，β をもつので，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ ………(＊)

$$a_1=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=p+q+1$$

$$a_2=(\alpha^2-1)(\beta^2-1)=\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)+1$$

$$=(\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+1=-p^2+q^2+2q+1$$

$$a_3=(\alpha^3-1)(\beta^3-1)=\alpha^3\beta^3-(\alpha^3+\beta^3)+1$$

$$=(\alpha\beta)^3-(\alpha+\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+1=p^3+q^3-3pq+1$$

すると, p, q がともに整数なので，a_1，a_2，a_3 はすべて整数である。

(2)　$I=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ とおくと，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ の場合,

(i)　$|\alpha|<1$ かつ $|\beta|<1$ のとき

$$I=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=\frac{1}{1}=1$$

(ii)　$|\alpha|>1$ かつ $|\beta|>1$ のとき

$$I=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\alpha+\frac{\alpha-1}{\alpha^n-1}\right|\left|\beta+\frac{\beta-1}{\beta^n-1}\right|=|\alpha\beta|=|q|$$

(i)(ii)より, I はいずれのときも整数である。

(3)　$I=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるのは, (2)より，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)<0$ のときである。

ここで，α，β についての対称性より，$|\alpha|>1$ かつ $|\beta|<1$ のときだけ考えても, 一般性を失わないので,

$$I=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\alpha+\frac{\alpha-1}{\alpha^n-1}\right|\left|\frac{\beta^{n+1}-1}{\beta^n-1}\right|=|\alpha|\cdot 1=|\alpha|$$

すると，$|\alpha|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ より，$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

整数係数の 2 次方程式の実数解が α，β なので，$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ となり, (＊)から，$p=-1$，$q=-1$ である。

また，$\alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき $\beta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となり, (＊)から，$p=1$，$q=-1$ である。

以上より，$(p,\ q)=(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$

［解　説］

難問風の装いですが, (2)の誘導で(3)はスムーズに流れます。ただ, 問題文から推測すると, 後半をもう少し丁寧に記した方がよかったかもしれません。また, (1)は, 最初, 次数下げを考えましたが, 結局, 普通の方法で……。

© 電送数学舎 2012

5

問題のページへ

(1)　箱 A に黒玉が 3 個入っているとき，箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると，箱 A は黒玉 1 個，箱 B は黒玉 2 個と白玉 2 個になっている。その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れたとき，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n は，

$$p_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6},\ \ p_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3},\ \ p_3=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

(2)　箱 A に黒玉が 2 個と白玉が 1 個入っているとき，試行 T によって箱 A に黒玉が n 個入っている確率を r_n とすると，$r_1=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{5}{18}$

$$r_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{11}{18},\ \ r_3=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{18}$$

また，箱 A に黒玉が 1 個と白玉が 2 個入っているとき，試行 T によって箱 A に黒玉が n 個入っている確率を s_n とすると，$s_1=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{7}{18}$

$$s_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{10}{18},\ \ s_3=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{18}$$

これより，試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n は，

$$q_1=p_1\cdot s_1+p_2\cdot r_1+p_3\cdot p_1=\frac{7}{108}+\frac{10}{54}+\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$$

$$q_2=p_1\cdot s_2+p_2\cdot r_2+p_3\cdot p_2=\frac{10}{108}+\frac{22}{54}+\frac{4}{36}=\frac{11}{18}$$

$$q_3=p_1\cdot s_3+p_2\cdot r_3+p_3\cdot p_3=\frac{1}{108}+\frac{4}{54}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$$

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率は，

$$q_1\cdot s_3+q_2\cdot r_3+q_3\cdot p_3=\frac{5}{324}+\frac{22}{324}+\frac{6}{324}=\frac{11}{108}$$

［解　説］

難問ではありませんが，非常に煩雑な問題です。落ち着いて状況を判断し，計算するしか手はありません。

© 電送数学舎 2012