1

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ を満たす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。辺 AP を $1:3$ に内分する点を D，辺 CP の中点を E，辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と t を用いて表せ。

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ。

(4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，t の値および線分 OP の長さを求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x+2y \leqq 5,\ 3x+y \leqq 8,\ -2x-y \leqq 4,\ -x-4y \leqq 7$$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$x+y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q および点 R の座標を求めよ。

(2) $a>0$ かつ $b>0$ とする。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。

3　解答解説のページへ

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに, 3 の目が出た場合は, 裏裏表表裏表 となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

座標平面上の円$(x-1)^2+(y-1)^2=2$をCとする。以下の問いに答えよ。

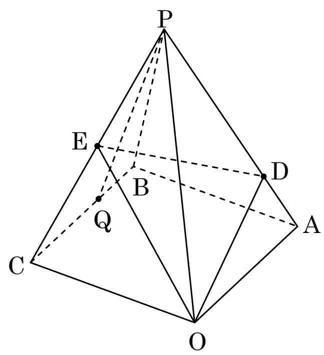
(1) 直線$y=x-2$は円Cに接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2) 円Cと放物線$y=\dfrac{1}{4}x^2-1$の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 不等式$y\geqq\dfrac{1}{4}x^2-1$の表す領域をDとする。また，不等式$|x|+|y|\leqq 2$の表す領域をAとし，不等式$(|x|-1)^2+(y-1)^2\leqq 2$の表す領域をBとする。そして，和集合$A\cup B$，すなわち領域Aと領域Bを合わせた領域をEとする。このとき，領域Dと領域Eの共通部分$D\cap E$を図示し，さらに，その面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　点 D は辺 AP を $1:3$ に内分する点，点 E は辺 CP の中点より，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP},\ \ \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$$

(2)　点 Q は辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点より，

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$$
$$=(1-t)(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+t\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$$
$$=(1-t)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$$

(3)　$OA=1$，$OP=AP=k$ とおき，$\triangle OAP$ に余弦定理を適用すると，

$$k^2=1^2+k^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP},\ \ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}$$

(4)　$OC=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ であり，(2)と同様にすると，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}$

さて，直線 PQ が平面 ODE に垂直なので，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OD}=0$ となり，

$$\left((1-t)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\right)\cdot(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP})=0$$

$$3(1-t)+\frac{1}{2}(1-t)+\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{2}-k^2=0,\ \ \frac{7}{2}t+k^2=\frac{5}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OE}=0$ から，$\left((1-t)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\right)\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP})=0$

$$\frac{1}{2}(1-t)+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k^2=0,\ \ \frac{1}{2}t+k^2=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$3t=1$ より $t=\frac{1}{3}$

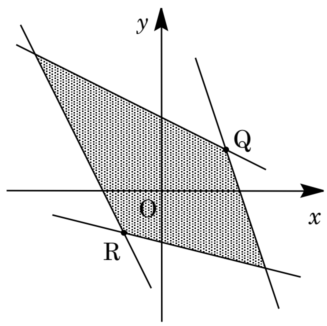
また，$k^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ より，$OP=k=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用です。誘導が細かく付いています。なお，(3)では正射影ベクトルを考える方法もあります。

2

問題のページへ



(1)　連立不等式 $x+2y \leqq 5$， $3x+y \leqq 8$， $-2x-y \leqq 4$， $-x-4y \leqq 7$ の表す領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

ここで，$x+y=k$ とおくと，この方程式は傾き -1 の直線を表す。

すると，図より，k の値が最大となる点 Q は，境界線 $x+2y=5$ ……①と $3x+y=8$ ……②の交点である。

①②を連立すると，$x=\dfrac{11}{5}$，$y=\dfrac{7}{5}$ より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ となる。

k の値が最小となる点 R は，境界線 $-2x-y=4$ ……③と $-x-4y=7$ ……④の交点である。

③④を連立すると，$x=-\dfrac{9}{7}$，$y=-\dfrac{10}{7}$ より，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{9}{7},\ -\dfrac{10}{7}\right)$ となる。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$ax+by=l$ とおくと，この方程式は傾き $-\dfrac{a}{b}$ の直線を表す。

すると，l が点 Q でのみ最大値をとる条件は，直線①の傾きが $-\dfrac{1}{2}$ で，直線②の傾きが -3 より，

$$-3<-\frac{a}{b}<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\frac{a}{b}<3 \cdots\cdots⑤$$

また，l が点 R でのみ最小値をとる条件は，直線③の傾きが -2 で，直線④の傾きが $-\dfrac{1}{4}$ より，

$$-2<-\frac{a}{b}<-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}<\frac{a}{b}<2 \cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，求める値の範囲は，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<2$ である。

［解　説］

領域と最大・最小についての基本問題です。ただ，問題の特性として，解答例を作成するのに時間がかかります。

3

問題のページへ

(1)　L を 2 回続けて行うとき，左端の硬貨は，必ず表→裏→表と反転する。これより，表が 1 枚となるのは，左端の硬貨が表，それ以外は裏という場合である。

このときは，出た目が，6→1 または 1→6 のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{18}$$

(2)　L, R の順に操作を行うとき，出た目と表の枚数の関係は右表のようになる。

なお，右表では，L の操作で 1 の目が出るのを L1，2 の目が出るのを L2，3 の目が出るのを L3，…，R の操作で 1 の目が出るのを R1，2 の目が出るのを R2，3 の目が出るのを R3，…と表している。

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
L1	4	3	2	1	0	1
L2	3	2	1	0	1	2
L3	2	1	0	1	2	3
L4	1	0	1	2	3	4
L5	0	1	2	3	4	5
L6	1	2	3	4	5	6

これより，表の枚数の期待値は，

$$0\times\frac{5}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{19}{9}$$

(3)　L, R, L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となるのは次の場合である。

(i)　最初の操作が L6 以外のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が 0 で，3 回目に 6 の目が出る場合より，

L1→R5→L6，L2→R4→L6，L3→R3→L6，L4→R2→L6，L5→R1→L6

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 5=\frac{5}{216}$ となる。

(ii)　最初の操作が L6 のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が k のとき，3 回目に $6-k$ の目が出る場合より，

L6→R1→L5，L6→R2→L4，L6→R3→L3，L6→R4→L2，L6→R5→L1

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 5=\frac{5}{216}$ となる。

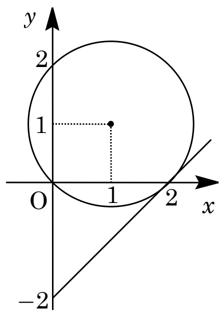
(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{5}{216}+\frac{5}{216}=\frac{5}{108}$ である。

［解　説］

パズルのような問題です。(2)では，期待値を求めるので，センター試験を解くときと同じように，すべての場合を表にまとめました。すると，これが次の(3)への誘導となっていました。

4

問題のページへ



(1)　円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$ ……①と直線 $y=x-2$ すなわち $x-y-2=0$ ……②に対して，C の中心 $(1,\ 1)$ と直線②との距離は，$\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$ となる。これは，C の半径と等しいので，円 C と直線②は接する。

また，直線②の法線ベクトルの成分は $(1,\ -1)$ とすることができ，しかもこのベクトルの大きさは，円 C の半径 $\sqrt{2}$ と等しいことより，接点の座標は，

$$(1,\ 1)+(1,\ -1)=(2,\ 0)$$

(2)　円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ ……③との共有点は，①③を連立して，

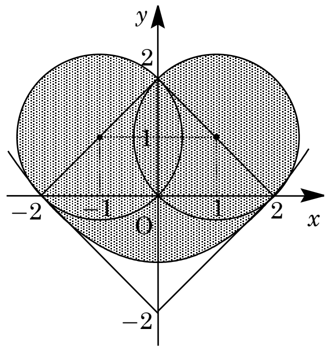
$$(x-1)^2+\left(\frac{1}{4}x^2-2\right)^2=2,\ 16(x-1)^2+(x^2-8)^2=32$$

まとめると，$x^4-32x+48=0$，$(x-2)^2(x^2+4x+12)=0$

すると，$x^2+4x+12=0$ は実数解をもたないので，解は $x=2$ だけとなり，共有点の座標は $(2,\ 0)$ である。

(3)　不等式 $|x|+|y|\leqq 2$ の表す領域 A は，4 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$，$(0,\ -2)$ を頂点とする正方形の内部または周上を表す。

また，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2\leqq 2$ の表す領域 B は，$x\geqq 0$ のとき中心 $(1,\ 1)$ で半径 $\sqrt{2}$ の円の内部または周上，$x\leqq 0$ のとき中心 $(-1,\ 1)$ で半径 $\sqrt{2}$ の円の内部または周上を表す。



さらに，不等式 $y\geqq\dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域 D は，放物線③の上側または線上を表す。

以上より，$D\cap E=D\cap(A\cup B)$ の表す領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

この面積 S は，y 軸に関する対称性より，

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2+\int_0^2\left\{-x+2-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$$

$$=\pi+\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2-x+3\right)dx=\pi+\left[-\frac{1}{12}x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^2=\pi+\frac{10}{3}$$

よって，$S=2\pi+\dfrac{20}{3}$ である。

［解　説］

不等式と領域の基本問題です。見かけほど繁雑ではありません。