1　　解答解説のページへ

$a>1$ とし，2 つの曲線

$$y=\sqrt{x}\quad (x\geqq 0),\quad y=\frac{a^3}{x}\quad (x>0)$$

を順に C_1，C_2 とする。また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2)　点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ を満たす。辺 AP を $2:1$ に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする。このとき，長さの比 $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$，および線分 OP の長さを求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して, 以下の操作 L と操作 R を考える。

L : さいころを投げて, 出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R : さいころを投げて, 出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば, 表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに, 3 の目が出た場合は, 裏裏表表裏表 となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき, 表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき, 表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき, すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

原点 O を中心とし，点 A$(0,\ 1)$ を通る円を S とする。点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1)　円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2)　点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 AB，円 T の短い方の弧 BC，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

実数 $x,\ y,\ t$ に対して，行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。$(AB)^2$ が対角行列，すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする。

(1)　命題「$3x-3y-2t\neq 0 \implies A=tB$」を証明せよ。

以下，(2), (3), (4)では，さらに $A^2\neq E$ かつ $A^4=E$ であるとする。ただし，E は単位行列を表す。

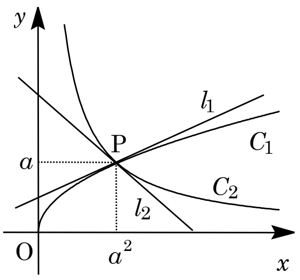
(2)　$3x-3y-2t=0$ を示せ。

(3)　x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(4)　$x,\ y,\ t$ が整数のとき，行列 A を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1 : y=\sqrt{x}$ ……①と $C_2 : y=\dfrac{a^3}{x}$ ……②を連立すると，

$$\sqrt{x}=\frac{a^3}{x},\quad x^{\frac{3}{2}}=a^3$$

これより，$x=a^2$，$y=a$ より，$\mathrm{P}(a^2,\ a)$

さて，①より，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ となり，点 P における C_1 の接線 l_1 は，$x=a^2$ のとき $y'=\dfrac{1}{2a}$ から，

$$y-a=\frac{1}{2a}(x-a^2),\quad y=\frac{1}{2a}x+\frac{a}{2}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，C_1 と y 軸および l_1 で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\Big(\frac{a}{2}+a\Big)a^2-\int_0^{a^2}\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{4}a^3-\frac{2}{3}\Big[\,x^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^{a^2}=\frac{3}{4}a^3-\frac{2}{3}a^3=\frac{1}{12}a^3$$

(2)　②より，$y'=-\dfrac{a^3}{x^2}$ より，点 P における C_2 の接線 l_2 の傾きは，$y'=-\dfrac{a^3}{a^4}=-\dfrac{1}{a}$

ここで, x 軸の正の部分と l_1，l_2 のなす角をそれぞれ α，β とすると,

$$\tan\alpha=\frac{1}{2a},\quad \tan\beta=-\frac{1}{a}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{1}{2a}\Big(-\dfrac{1}{a}\Big)}=\frac{3a}{2a^2-1}$$

$a>1$ より $\tan(\alpha-\beta)>0$ となり，$\theta(a)=\alpha-\beta$ から $\tan\theta(a)=\dfrac{3a}{2a^2-1}$

さて，$a\to\infty$ のとき，$\tan\theta(a)\to 0$ から $\theta(a)\to 0$ となり，$\cos\theta(a)\to 1$ より，

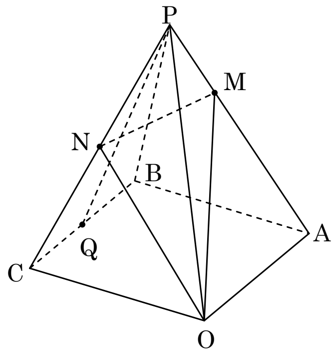
$$\lim_{a\to\infty}a\sin\theta(a)=\lim_{a\to\infty}a\tan\theta(a)\cos\theta(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{3a^2}{2a^2-1}\cos\theta(a)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

［解 説］

微積分の応用問題です。また, 2 直線のなす角の扱いとしては, ここでは tan の加法定理の適用が妥当でしょう。

2

問題のページへ



条件より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}$$

さて，点 M は辺 AP を$2:1$に内分する点，点 N は辺 CP の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで，Q は線分 BC を$t:1-t$に分ける点とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

さて，直線 PQ が平面 OMN に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0$ となり，$\mathrm{OP}=k$ とおくと，

$$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$$
$$(1-t)+2(1-t)\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2k^2=0,\ \frac{3}{2}t+2k^2=\frac{9}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=0$ から，$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$

$$\frac{1}{4}(1-t)+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k^2=0,\ \frac{1}{4}t+k^2=\frac{5}{4}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t=-\frac{1}{4}$ となり，$1-t=\frac{5}{4}$ から，点 Q は BC を$1:5$に外分するので，

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=1:5$$

また，$k^2=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{16}$ より，$\mathrm{OP}=k=\sqrt{\frac{21}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{4}$

［解　説］

t の値が負になり計算間違いをしたかと思いましたが，問題をよく読むと，「直線 BC 上の点 Q」と記されていました。このため，上図の Q の位置は，結論とは異なります。なお，文系で類題が出されています。

3

問題のページへ

(1)　L を 2 回続けて行うとき，左端の硬貨は，必ず表→裏→表と反転する。これより，表が 1 枚となるのは，左端の硬貨が表，それ以外は裏という場合である。

このときは，出た目が，6→1 または 1→6 のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{18}$$

(2)　L, R の順に操作を行うとき，出た目と表の枚数の関係は右表のようになる。

なお，右表では，L の操作で 1 の目が出るのを L1，2 の目が出るのを L2，3 の目が出るのを L3，…，R の操作で 1 の目が出るのを R1，2 の目が出るのを R2，3 の目が出るのを R3，…と表している。

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
L1	4	3	2	1	0	1
L2	3	2	1	0	1	2
L3	2	1	0	1	2	3
L4	1	0	1	2	3	4
L5	0	1	2	3	4	5
L6	1	2	3	4	5	6

これより，表の枚数の期待値は，

$$0\times\frac{5}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{19}{9}$$

(3)　L, R, L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となるのは次の場合である。

(i)　最初の操作が L6 以外のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が 0 で，3 回目に 6 の目が出る場合より，

L1→R5→L6，L2→R4→L6，L3→R3→L6，L4→R2→L6，L5→R1→L6

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 5=\frac{5}{216}$ となる。

(ii)　最初の操作が L6 のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が k のとき，3 回目に $6-k$ の目が出る場合より，

L6→R1→L5，L6→R2→L4，L6→R3→L3，L6→R4→L2，L6→R5→L1

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 5=\frac{5}{216}$ となる。

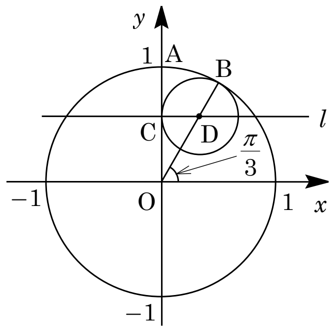
(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{5}{216}+\frac{5}{216}=\frac{5}{108}$ である。

［解　説］

パズルのような問題です。(2)では，期待値を求めるので，センター試験を解くときと同じように，すべての場合を表にまとめました。すると，これが次の(3)への誘導となっていました。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1) 円 S 上の点 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に対して，条件より，円 T の中心 D は線分 OB 上にあることより，t を正の実数として，$\mathrm{D}(t,\ \sqrt{3}t)$ とおくことができる。

すると，DB $=$ DC から，

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}t\right)^2}=t$$

$$\left(\frac{1}{2}-t\right)\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=t$$

これより，$1-2t=t$ から $t=\frac{1}{3}$ となり，円 T は中心 $\mathrm{D}\left(\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，半径 $\frac{1}{3}$ である。

(2) 円 $S: x^2+y^2=1$，$T:\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ に対し，その上側の半円は，それぞれ $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}$ と表せる。

ここで，弧 AB，弧 BC を直線 $l: y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を，それぞれ V_1，V_2 とすると，

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3}-x^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2-\frac{1}{4}\pi=\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$$

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right\}dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{9}x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{18}\pi-\frac{1}{72}\pi=\frac{1}{24}\pi$$

よって，求める立体の体積を V とすると，

$$V=V_1-V_2=\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2-\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$$

［解　説］

回転体の体積を求める計算問題です。なお，V_1 を求める際に，円を対応させて定積分の計算を一部，省略しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$C = AB = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-6y & 4x-5y \\ x-5t & x-4t \end{pmatrix}$とすると,

$$C^2 - (5x-6y+x-4t)C + \{(5x-6y)(x-4t)-(4x-5y)(x-5t)\}E = O$$

$$2(3x-3y-2t)C = C^2 + \{(5x-6y)(x-4t)-(4x-5y)(x-5t)\}E$$

条件より C^2 は対角行列であり，また E も対角行列なので，$3x-3y-2t \neq 0$ のとき，C は対角行列となり，

$$4x-5y=0,\ x-5t=0$$

よって，$x=5t$，$y=4t$ から，$A = \begin{pmatrix} 5t & 4t \\ -6t & -5t \end{pmatrix} = tB$

(2)　まず，$B^2 + (-25+24)E = O$ より，$B^2 = E$

さて，ここで，$A = tB$ であると仮定すると，

$$A^2 = t^2B^2 = t^2E,\ A^4 = (t^2E)^2 = t^4E$$

条件より，$A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ なので，$t^2 \neq 1$ かつ $t^4 = 1$ となり，$t^2 = -1$

これは，t が実数という条件に反することより，$A \neq tB$ である。すると，(1)より，

$$3x-3y-2t = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3)　まず，$A^2 + (-x^2+ty+xy)E = O$ より，$A^2 = (x^2-ty-xy)E$

$$A^4 = (x^2-ty-xy)^2E$$

$A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ なので，$x^2-ty-xy \neq 1$ かつ $(x^2-ty-xy)^2 = 1$ より，

$$x^2-ty-xy = -1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$y = x - \frac{2}{3}t$ となり，②に代入すると，

$$x^2 - (t+x)\left(x - \frac{2}{3}t\right) = -1,\ \frac{1}{3}tx - \frac{2}{3}t^2 = 1$$

よって，$t \neq 0$ から，$x = 2t + \frac{3}{t} \cdots\cdots ③$，$y = 2t + \frac{3}{t} - \frac{2}{3}t = \frac{4}{3}t + \frac{3}{t} \cdots\cdots ④$

(4)　x, y, t が整数のとき，③より t は 3 の約数となり，④より t は 3 の倍数となる。

よって，$t = \pm 3$ であり，このとき，$(x,\ y,\ t) = (7,\ 5,\ 3)$，$(-7,\ -5,\ -3)$ から，

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

［解　説］

行列の演算についての問題です。上の解答例では，ハミルトン・ケーリーの定理を，(1)では C について，(2)では B について，(3)では A について利用しています。