1　解答解説のページへ

座標平面上の直線 $y=-1$ を l_1，直線 $y=1$ を l_2 とし，x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

$$d(\mathrm{P},\ l_1) \geqq \mathrm{PO} \quad \text{かつ} \quad d(\mathrm{P},\ l_2) \geqq \mathrm{PA} \cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$d(\mathrm{P},\ l)$ は点 P と直線 l の距離である。

(1)　条件①を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2)　条件①を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし，a の値は(1)で求めた範囲にあるとする。

2　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2)　自然数 $a,\ b,\ c$ が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，$a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しないことを証明せよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE} = R\cos A$ を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C = 3$ を証明せよ。

4

解答解説のページへ

A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$l_1 : y = -1$，$l_2 : y = 1$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$d(\mathrm{P},\ l_1) \geqq \mathrm{PO}$ かつ $d(\mathrm{P},\ l_2) \geqq \mathrm{PA}$ ……①より,

$$|y+1| \geqq \sqrt{x^2+y^2} \cdots\cdots②,\ |y-1| \geqq \sqrt{(x-a)^2+y^2} \cdots\cdots③$$

②より，$(y+1)^2 \geqq x^2+y^2$，$y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ ………④

③より，$(y-1)^2 \geqq (x-a)^2+y^2$，$y \leqq -\dfrac{1}{2}(x-a)^2+\dfrac{1}{2}$ ………⑤

そこで, ①を満たす点 P が存在する条件は, ④⑤より, ある x に対して,

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \leqq -\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2},\ 2x^2-2ax+a^2-2 \leqq 0$$

これより，$2x^2-2ax+a^2-2=0$ ……⑥の判別式を D とおくと,

$$D/4 = a^2-2(a^2-2) = -a^2+4 \geqq 0,\ -2 \leqq a \leqq 2$$

(2)　⑥より，$x = \dfrac{a \pm \sqrt{-a^2+4}}{2}$ となり，この値を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，点 P 全体がなす図形の面積 S は,

$$S = \int_\alpha^\beta \left\{-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right\}dx = \int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}\left(\sqrt{-a^2+4}\right)^3$$

［解　説］

軌跡と領域についての標準的な問題です。出題範囲外ですが, 題材は数 C の放物線の定義がベースになっています。

2　問題のページへ

(1)　まず，自然数 a に対し，a が 3 の倍数のとき a^2 も 3 の倍数である。

また，a が 3 の倍数でないとき，$a=3k\pm1$（k は整数）とおくと，

$$a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

すると，a^2 を 3 で割った余りは 1 となる。

よって，a と a^2 について 3 で割った余りを対応させると，右表のようになり，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

a	0	1	2
a^2	0	1	1

(2)　a^2，b^2 に対し，a^2+b^2 を 3 で割った余りをまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

さて，$a^2+b^2=3c^2$ のとき，$3c^2$ が 3 の倍数より，a^2+b^2 も 3 の倍数である。すると，a^2，b^2 はともに 3 の倍数となり，さらに(1)より，a, b はともに 3 の倍数である。

よって，a_1，b_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$ とおくと，

$$9a_1{}^2+9b_1{}^2=3c^2,\ \ 3a_1{}^2+3b_1{}^2=c^2$$

これより，c^2 は 3 の倍数となり，(1)より，c は 3 の倍数である。

以上より，$a^2+b^2=3c^2$ のとき a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c が存在すると仮定したとき，(2)より，a_1，b_1，c_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$，$c=3c_1$ とおくと，

$$9a_1{}^2+9b_1{}^2=3\cdot9c_1{}^2,\ \ a_1{}^2+b_1{}^2=3c_1{}^2$$

すると，(2)から，a_2，b_2，c_2 を自然数として，$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ とおくことができ，

$$9a_2{}^2+9b_2{}^2=3\cdot9c_2{}^2,\ \ a_2{}^2+b_2{}^2=3c_2{}^2$$

以下，同様に，$a_n=3a_{n+1}$，$b_n=3b_{n+1}$，$c_n=3c_{n+1}$　($n=1,\ 2,\ \cdots$) とおくと，

$$a>a_1>a_2>\cdots>0,\ \ b>b_1>b_2>\cdots>0,\ \ c>c_1>c_2>\cdots>0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(*)から，単調に減少する自然数の列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在することになり，明らかに不適である。

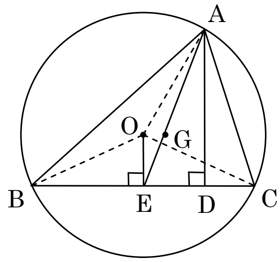
よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しない。

［解　説］

ときどき見かける整数問題です。(1)と(2)は，メインの(3)の誘導となっています。要演習の 1 題です。

3

問題のページへ



(1)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2R\sin C,\ \mathrm{BC}=2R\sin A,\ \mathrm{CA}=2R\sin B$$

ここで，△ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C\cdots\cdots\cdots①$$

A から辺 BC に下ろした垂線が AD より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AD}\cdot R\sin A\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\mathrm{AD}\cdot R\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$

また，O から辺 BC に下ろした垂線が OE で，$\angle\mathrm{BOE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\frac{1}{2}\cdot 2\angle\mathrm{A}=A$

よって，$\mathrm{OE}=R\cos\angle\mathrm{BOE}=R\cos A$

(2)　直線 AG と辺 BC は BC の中点，すなわち点 E で交わり，G と O が一致するならば，$\mathrm{GE}\perp\mathrm{BC}$ すなわち $\mathrm{AE}\perp\mathrm{BC}$ となる。これより $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

同様に考えると，$\mathrm{BG}\perp\mathrm{AC}$ となり，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となり，△ABC は正三角形である。

(3)　OG が BC と平行であるとき，△OGE ∽ △DEA となり，$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=\mathrm{GE}:\mathrm{EA}$

ここで，点 G は△ABC の重心より，$\mathrm{GE}:\mathrm{EA}=1:3$ となり，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=1:3,\ \mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$$

(1)の結果から，$2R\sin B\sin C=3R\cos A$，$2\sin B\sin C=-3\cos(B+C)$ となり，

$$2\sin B\sin C=-3(\cos B\cos C-\sin B\sin C),\ 3\cos B\cos C=\sin B\sin C$$

よって，$\tan B\tan C=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=3$ となる。

［解　説］

図形の計量についての標準的な問題です。誘導に従えば，一見，難しそうな(3)の関係式が証明できます。

4

問題のページへ

(1)　A さんが 5 円硬貨を 3 枚投げたとき，表 3 枚の場合(合計金額 15 円)，表 2 枚で裏 1 枚の場合(合計金額 10 円)，表 1 枚で裏 2 枚の場合(合計金額 5 円)，裏 3 枚の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$，${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ である。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

B さんが 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚を投げたとき，2 枚とも表の場合(合計金額 5 円)，10 円表で 5 円裏の場合(合計金額 10 円)，10 円裏で 5 円表の場合(合計金額 5 円)，2 枚とも裏の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ずつである。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

以上より，A さんが B さんに勝つ確率 p，引き分けとなる確率 q は，

$$p=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$q=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2)　ゲーム終了後，A さんの所持金とその各々の場合の確率は以下のようになる。

(i)　B さんの合計金額が 0 円で A さんが勝った場合（所持金 30 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{32}$$

(ii)　B さんの合計金額が 5 円で A さんが勝った場合（所持金 25 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(iii) B さんの合計金額が 10 円で A さんが勝った場合（所持金 20 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

(iv)　引き分けの場合（所持金 15 円）で，確率は，(1)より $q=\frac{1}{4}$

(v)　A さんの合計金額が 10 円で A さんが負けた場合（所持金 10 円）

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(vi)　A さんの合計金額が 5 円で A さんが負けた場合（所持金 5 円）

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

(vii) A さんの合計金額が 0 円で A さんが負けた場合（所持金 0 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(i)～(vii)より，ゲーム終了後のAさん所持金の期待値 E は，

$$E=0\times\frac{3}{32}+5\times\frac{3}{16}+10\times\frac{3}{32}+15\times\frac{1}{4}+20\times\frac{1}{32}+25\times\frac{1}{8}+30\times\frac{7}{32}=\frac{255}{16}$$

［解　説］

内容的にはセンターレベルですが，集中力がかなり要求される確率の問題です。また，(2)では，題意を取り違えないように注意しなくてはいけません。