1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x-\sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを l とする。

(1) l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) a は(1)で求めたものとする。曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2)　自然数 $a,\ b,\ c$ が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると, $a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しないことを証明せよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上の楕円 $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ ……①を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 楕円①と直線 $y=x+a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(2) $|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形の概形をかけ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が楕円①上を動くとき，$|x|+|y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x-\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$に対して，$f'(x)=1-\cos x$

さて，曲線 $y=f(x)$ に対して，傾き $\dfrac{1}{2}$ の接線 l の接点を $(a,\ b)$ とすると，

$f'(a)=1-\cos a=\dfrac{1}{2}$ から，$\cos a=\dfrac{1}{2}$ となり，

$$a=\frac{\pi}{3},\ b=\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

接線 l の方程式は，$y-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において，$x\geqq\sin x$ から $f(x)\geqq 0$ となり，求める回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{f(x)\}^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x\sin x+\sin^2x)dx$$

$$=\pi\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+2\pi\Big[x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\pi^4}{81}+\frac{\pi^2}{3}-2\pi\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi^4}{81}+\frac{\pi^2}{3}-\sqrt{3}\pi+\frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi=\frac{\pi^4}{81}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi$$

［解 説］

微積分の基本問題です。勢いをつけるために設定された問題でしょう。

2

問題のページへ

(1)　まず，自然数 a に対し，a が 3 の倍数のとき a^2 も 3 の倍数である。

また，a が 3 の倍数でないとき，$a=3k\pm1$（k は整数）とおくと，

$$a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

すると，a^2 を 3 で割った余りは 1 となる。

よって，a と a^2 について 3 で割った余りを対応させると，右表のようになり，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

a	0	1	2
a^2	0	1	1

(2)　a^2，b^2 に対し，a^2+b^2 を 3 で割った余りをまとめると，右表のようになる。

a^2 ＼ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

さて，$a^2+b^2=3c^2$ のとき，$3c^2$ が 3 の倍数より，a^2+b^2 も 3 の倍数である。すると，a^2，b^2 はともに 3 の倍数となり，さらに(1)より，a, b はともに 3 の倍数である。

よって，a_1，b_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$ とおくと，

$$9{a_1}^2+9{b_1}^2=3c^2,\ 3{a_1}^2+3{b_1}^2=c^2$$

これより，c^2 は 3 の倍数となり，(1)より，c は 3 の倍数である。

以上より，$a^2+b^2=3c^2$ のとき a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c が存在すると仮定したとき，(2)より，a_1，b_1，c_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$，$c=3c_1$ とおくと，

$$9{a_1}^2+9{b_1}^2=3\cdot9{c_1}^2,\ {a_1}^2+{b_1}^2=3{c_1}^2$$

すると，(2)から，a_2，b_2，c_2 を自然数として，$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ とおくことができ，

$$9{a_2}^2+9{b_2}^2=3\cdot9{c_2}^2,\ {a_2}^2+{b_2}^2=3{c_2}^2$$

以下，同様に，$a_n=3a_{n+1}$，$b_n=3b_{n+1}$，$c_n=3c_{n+1}$（$n=1,\ 2,\ \cdots$）とおくと，

$$a>a_1>a_2>\cdots>0,\ b>b_1>b_2>\cdots>0,\ c>c_1>c_2>\cdots>0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，単調に減少する自然数の列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在することになり，明らかに不適である。

よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しない。

［解　説］

ときどき見かける整数問題です。(1)と(2)は，メインの(3)の誘導となっています。要演習の 1 題です。

3　問題のページへ

(1)　楕円 $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ ……①，直線 $y=x+a$ ……②に対して，

①から，$0\leqq\theta<2\pi$ として，$x=-2+4\cos\theta$ ……③，$y=1+2\sin\theta$ ……④

③④を②に代入すると，$1+2\sin\theta=-2+4\cos\theta+a$

$2(\sin\theta-2\cos\theta)+3=a$，$2\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+3=a$ ………⑤

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ……⑥，$\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ……⑦

①と②が交点をもつ条件は，⑤を満たす θ が存在する条件に対応するので，

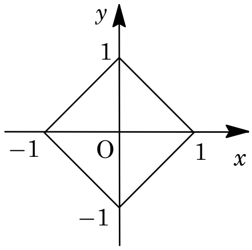
$-2\sqrt{5}+3\leqq a\leqq 2\sqrt{5}+3$

(2)　$f(x,\ y)=|x|+|y|-1$ とおくと，$f(-x,\ y)=f(x,\ -y)=f(x,\ y)$

これより，図形 $f(x,\ y)=0$ は，x 軸対称かつ y 軸対称である。そこで，$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ において，

$f(x,\ y)=x+y-1=0$，$x+y=1$

対称性を考えると，$f(x,\ y)=0$ を満たす図形は，右図の正方形である。

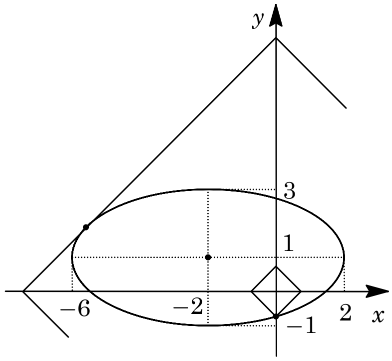


(3)　$|x|+|y|=k$ とおくと，(2)から，この図形は 4 点 $(k,\ 0)$，$(0,\ k)$，$(-k,\ 0)$，$(0,\ -k)$ を頂点とする正方形である。

また，楕円①と y 軸との交点は，

$\dfrac{(-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$，$y=1\pm\sqrt{3}$

さて，点 $(x,\ y)$ が楕円①上を動くとき，k が最大となるのは，右図より，直線 $y=x+k$ が楕円①に接するときであり，(1)より $k=2\sqrt{5}+3$ である。このとき，⑤より，



$\sin(\theta+\alpha)=1$，$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

すると，③④⑥⑦より，$x=-2+4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-2+4\sin\alpha=-2-\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$y=1+2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=1+2\cos\alpha=1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また，k が最小となるのは，$(x,\ y)=(0,\ 1-\sqrt{3})$ においてであり，このとき最小値 $k=|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$ をとる。

［解　説］

軌跡と最大・最小問題です。解答例では，計算量の軽減ために楕円をパラメータ表示しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　A さんが 5 円硬貨を 3 枚投げたとき，表 3 枚の場合(合計金額 15 円)，表 2 枚で裏 1 枚の場合(合計金額 10 円)，表 1 枚で裏 2 枚の場合(合計金額 5 円)，裏 3 枚の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$，${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ である。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

B さんが 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚を投げたとき，2 枚とも表の場合(合計金額 5 円)，10 円表で 5 円裏の場合(合計金額 10 円)，10 円裏で 5 円表の場合(合計金額 5 円)，2 枚とも裏の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ずつである。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

以上より，A さんが B さんに勝つ確率 p，引き分けとなる確率 q は，

$$p=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$q=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2)　ゲーム終了後，A さんの所持金とその各々の場合の確率は以下のようになる。

(i)　B さんの合計金額が 0 円で A さんが勝った場合（所持金 30 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{32}$$

(ii)　B さんの合計金額が 5 円で A さんが勝った場合（所持金 25 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(iii) B さんの合計金額が 10 円で A さんが勝った場合（所持金 20 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

(iv)　引き分けの場合（所持金 15 円）で，確率は，(1)より $q=\frac{1}{4}$

(v)　A さんの合計金額が 10 円で A さんが負けた場合（所持金 10 円）

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(vi)　A さんの合計金額が 5 円で A さんが負けた場合（所持金 5 円）

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

(vii) A さんの合計金額が 0 円で A さんが負けた場合（所持金 0 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(i)～(vii)より，ゲーム終了後の A さん所持金の期待値 E は,

$$E=0\times\frac{3}{32}+5\times\frac{3}{16}+10\times\frac{3}{32}+15\times\frac{1}{4}+20\times\frac{1}{32}+25\times\frac{1}{8}+30\times\frac{7}{32}=\frac{255}{16}$$

［解 説］

内容的にはセンターレベルですが，集中力がかなり要求される確率の問題です。また，(2)では，題意を取り違えないように注意しなくてはいけません。

5

問題のページへ

n を 2 以上の自然数として，n 次関数 $f_n(x)$ に対して，

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)=n!(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{n}\right)$$

すると，$f_n(1)=f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\cdots=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=0$ となり，平均値の定理より，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c が各区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$，$\cdots$，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$ において，少なくとも 1 つずつ存在する。

また，$f_n{}'(x)$ は $n-1$ 次関数より，方程式 $f_n{}'(x)=0$ の実数解は，高々 $n-1$ 個である。

よって，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c は，各区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$，$\cdots$，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$ において，1 つずつ存在することになる。

この c を $c=c_1$，c_2，$\cdots$，c_{n-1} $\left(\frac{1}{n}<c_{n-1}<\frac{1}{n-1}，\cdots，\frac{1}{3}<c_2<\frac{1}{2}，\frac{1}{2}<c_1<1\right)$ とおくと，$f_n{}'(x)$ の $n-1$ 次の係数は $n\cdot n!$ から，

$$f_n{}'(x)=n\cdot n!(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

これより，$f_n{}'(x)$ の符号は $x=c_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の前後で変化する。

以上より，$f_n(x)$ は，区間 $\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ でただ 1 つの極値をとる。

［解 説］

小問に分かれていない九大では珍しいタイプです。グラフを対応させると，感覚的にはわかりますが，証明となると書きにくく，隔靴掻痒の感があります。