1

解答解説のページへ

座標平面上の 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -x^2 + ax + b$ を考える。ただし，a, b は実数とする。

(1)　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a, b に関する条件を求めよ。

以下，a，b が(1)の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする。

(2)　b を a を用いて表せ。

(3)　a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P, 辺 OB を $2:1$ に内分する点を Q, 辺 OC を $1:3$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。

(操作)　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　p を素数とし，k を 0 以上の整数とする。$2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p，k の組をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1) $C_1 : y = x^2$ ……①, $C_2 : y = -x^2 + ax + b$ ……②を連立すると,

$$x^2 = -x^2 + ax + b\,,\ 2x^2 - ax - b = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わることより, ③の判別式 $D = a^2 + 8b > 0$

(2) ③の解 $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 8b}}{4}$ を $x = \alpha,\ \beta\ \ (\alpha < \beta)$ とおくと, C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2 + ax + b - x^2)dx = \int_{\alpha}^{\beta} -2(x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3$$

条件より, $\dfrac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = 9$ から $\beta - \alpha = 3$ となり, $\dfrac{\sqrt{a^2 + 8b}}{2} = 3$ である。

よって, $a^2 + 8b = 36$ から, $b = -\dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2}$ ………④

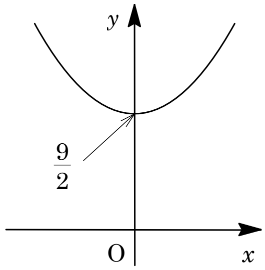
(3) ④を②に代入すると, $C_2 : y = -x^2 + ax - \dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2} = -\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2}$

そこで, C_2 の頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと,

$$x = \frac{a}{2},\ \ y = \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

a がすべての実数値をとって変化するとき, 点 P の軌跡は, 放物線 $y = \dfrac{1}{8}(2x)^2 + \dfrac{9}{2}$ すなわち $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}$ である。

図示すると, 右図の曲線となる。



［解 説］

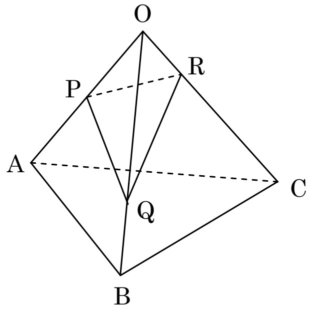
センターレベルの基本問題です。なお, (3)において, 軌跡の限界については考えなくてもよいにもかかわらず, 図示する意味は……。

2

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$



さて，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{4}{9}\cdot1^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=\frac{13}{36}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\frac{1}{16}\cdot1^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=\frac{3}{16}$$

よって，$\mathrm{PQ}=\sqrt{\frac{13}{36}}=\frac{\sqrt{13}}{6}$，$\mathrm{PR}=\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=\frac{5}{48}$

(3) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を S とすると，$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}$ となるので，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{6^2}\cdot\frac{3}{4^2}-\frac{5^2}{48^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13\cdot3\cdot2^2-25}}{48}=\frac{\sqrt{131}}{96}$$

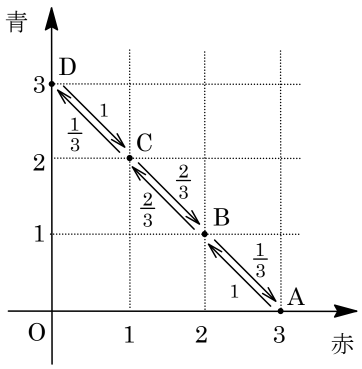
［解　説］

前問に引き続き，センターレベルの基本問題です。解答例では，(3)は数値計算だけとしましたが，出題の狙いは公式を導く方だったかもしれません。

3

問題のページへ

まず，与えられた操作を行ったとき，袋に入っている 3 個の玉について，(赤，青)の個数の組は，(3, 0)，(2, 1)，(1, 2)，(0, 3)のいずれかである。



そして，この 4 つの状態をそれぞれ A, B, C, D とおき，それらの間の遷移確率をまとめると，右図のようになる。

さて，B(2, 1)の状態から始めて，操作を 4 回繰り返したとき，もらう硬貨の総数が 1 枚であるのは，D(0, 3)に 1 回だけ進む場合と考え，

$$B\to C\to D\to C\to B,\ B\to C\to B\to C\to D,\ B\to A\to B\to C\to D$$

すると，その確率は，$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{26}{81}$ となる。

次に，B(2, 1)の状態から始めて，操作を 4 回繰り返したとき，もらう硬貨の総数が 2 枚であるのは，D(0, 3)に 2 回だけ進む場合と考え，

$$B\to C\to D\to C\to D$$

すると，その確率は，$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$ となる。

［解　説］

状態の推移のついて，よく見かけるタイプの問題です。計算する前に，推移確率をすべて求めて準備をしておくと，後は図から読み取るだけです。

4

問題のページへ

(1)　n が正の偶数のとき，l を自然数として，$n=2l$ とおくと，

$$2^n-1=2^{2l}-1=4^l-1=(3+1)^l-1$$
$$=(3^l+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-2}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1}3+1)-1$$
$$=3(3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-2}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-3}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1})$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である。

(2)　素数 p，0 以上の整数 k に対して，$2^{p-1}-1=p^k$ ………(＊)

(i)　p が偶数のとき

p は素数より $p=2$，すると，(＊)から $2^1-1=2^k$ となり，$k=0$ である。

(ii)　p が奇数のとき

$p-1$ は偶数となり，(1)の結果から $2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である。すると，(＊)から p^k が 3 の倍数すなわち p も 3 の倍数であることより，$p=3$ である。

(＊)から，$2^2-1=3^k$ となり，$k=1$ である。

(i)(ii)より，$(p,\ k)=(2,\ 0)$，$(3,\ 1)$

［解 説］

よく見かける整数問題です。(1)が誘導となっていますが，この問題でも，偶数の素数は 2 だけということがポイントになっています。