1　　解答解説のページへ

C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x \ (0 \leqq x \leqq 2),\ C_2 : y = -x^2 - 2x \ (-2 \leqq x \leqq 0)$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を l とする。

(1)　直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が(1)の条件を満たすとする。このとき，l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2)　S_1 を a を用いて表せ。

(3)　$S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

2

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ。

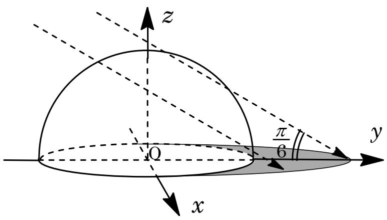
(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とするとき，不等式 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標空間内に，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



(1)　球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。

(2)　xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3)　$z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作)　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4) 8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

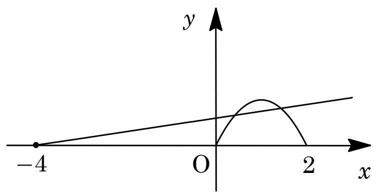
(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。

(3) p, q を異なる素数とする。$2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1: y=-x^2+2x$　$(0\leqq x\leqq 2)$　と　$l: y=a(x+4)$ の式を連立すると，$-x^2+2x=a(x+4)$ から，

$$x^2+(a-2)x+4a=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

l と C_1 が $0<x<2$ で接する条件は，①より，

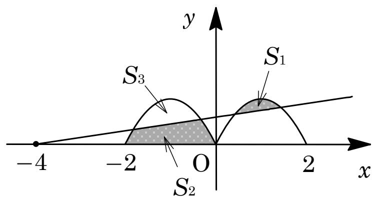
$$D=(a-2)^2-16a=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$0<-\frac{a-2}{2}<2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$a^2-20a+4=0$，$a=10\pm4\sqrt{6}$ となり，③から $-2<a<2$ なので，満たす a の値は，$a=10-4\sqrt{6}$ である。したがって，l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，右上図より，$0\leqq a<10-4\sqrt{6}$ である。

(2)　①の解 $x=\dfrac{-(a-2)\pm\sqrt{a^2-20a+4}}{2}$ を，$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 は,

$$S_1=\int_\alpha^\beta\{-x^2+2x-a(x+4)\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3$$



(3)　まず, x 軸と C_1 で囲まれた領域の面積は,

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

次に，C_1 と y 軸対称である $C_2: y=-x^2-2x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ と $l: y=a(x+4)$ の式を連立すると，$x^2+(a+2)x+4a=0 \cdots\cdots\cdots ④$

ここで，l と C_2 で囲まれた領域の面積を S_3 とおき，(2)と同様にすると，④の解が $x=\dfrac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2-12a+4}}{2}$ より，$S_3=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3$ となる。

さて，条件より x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積 S_2 に対し, $F(a)=S_1-S_2$ とおくと，$S_2=\dfrac{4}{3}-S_3$ より,

$$F(a)=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3+\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3-\frac{4}{3}$$

すると，$F(0)=\dfrac{4}{3}>0$，$F\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1+41\sqrt{41}}{5^3}-8\right)<0$ より，$F(a)=0$ すなわち $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する。

［解 説］

$10-4\sqrt{6}\fallingdotseq 0.202$ より, (3)の結論は, 図からほとんど明らかなのですが……。

2

問題のページへ

(1)　$x>1$ において，関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ に対し，

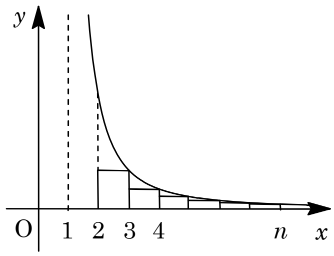
$$y'=-\frac{(\log x)^2+2\log x}{x^2(\log x)^4}=-\frac{\log x+2}{x^2(\log x)^3}<0$$

よって，関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少する。

(2)　$$\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\int(\log x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}dx=-(\log x)^{-1}+C=-\frac{1}{\log x}+C$$

(3)　(1)より，$y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は単調に減少するので，

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\int_2^n\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\Big[-\frac{1}{\log x}\Big]_2^n$$
$$=-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{\log 2}<\frac{1}{\log 2}$$



［解　説］

定積分と不等式に関する基本問題です。誘導に従うと，(3)の証明にスムーズに流れていきます。

3

問題のページへ

(1)　xy 平面上の点 $(x_0,\ y_0,\ 0)$ を通り，方向ベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ の直線は，

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ 0)+t(0,\ \sqrt{3},\ -1)\ \ (t\text{ は実数})\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，原点を中心とする半径 1 の球は，$x^2+y^2+z^2=1\cdots\cdots\cdots②$

①②を連立すると，$x_0{}^2+(y_0+\sqrt{3}t)^2+(-t)^2=1$

$$4t^2+2\sqrt{3}y_0t+x_0{}^2+y_0{}^2-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

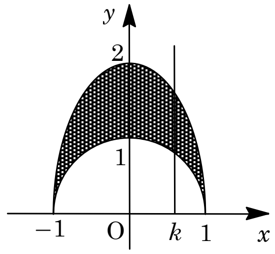
条件より，①と②が $z\geqq 0$ すなわち $-t\geqq 0\ (t\leqq 0)$ で接することより，

$$D/4=3y_0{}^2-4(x_0{}^2+y_0{}^2-1)=0\cdots\cdots④,\ \ -\frac{\sqrt{3}}{4}y_0\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より $4x_0{}^2+y_0{}^2=4$，⑤より $y_0\geqq 0$ となり，xy 平面上にできる影の境界線は，

$$4x^2+y^2=4,\ \ y\geqq 0$$

すると，球の外の影は右図の網点部となる。そして，直線 $x=k$ と領域の境界線 $4x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ の交点は，それぞれ $y=\sqrt{4-4k^2}=2\sqrt{1-k^2}$，$y=\sqrt{1-k^2}$ であるので，求める y 座標の範囲は，$\sqrt{1-k^2}\leqq y\leqq 2\sqrt{1-k^2}$



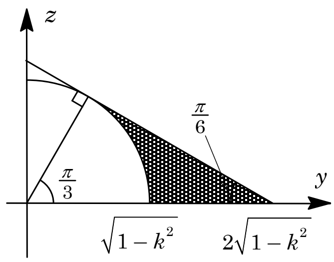
(2)　右図の網点部の面積は，$\dfrac{1}{2}(\pi\cdot 1\cdot 2-\pi\cdot 1^2)=\dfrac{1}{2}\pi$ である。

(3)　球の外で光が当たらない部分を平面 $x=k$ で切断すると，その切り口は右図の網点部となる。

その面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot 2\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(1-k^2)$$



よって，球の外で光が当たらない部分の体積 V は，

$$V=\int_{-1}^{1}S(k)dk=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\int_0^1(1-k^2)dk=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{9}\pi$$

［解　説］

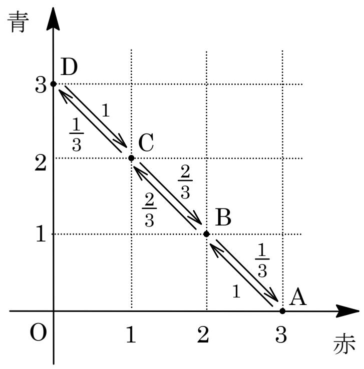
20 年ほど前には，よく出題された平行光源が題材となっています。その後，高校課程では空間図形の分野は薄められ，見かけることが少なくなりました。ただ，今年からの現行課程では，教科書の記述からすると，空間図形の分野は強化されていますので，繰り返す歴史の一つの例かもしれません。

4

問題のページへ

(1)　まず，与えらえた操作を行ったとき，袋に入っている 3 個の玉について，(赤，青)の個数の組は，(3, 0)，(2, 1)，(1, 2)，(0, 3) のいずれかである。

そして，この 4 つの状態をそれぞれ A, B, C, D とおき，それらの間の遷移確率をまとめると，右図のようになる。



さて，B(2, 1) の状態から始め操作を 2 回行うとき，もらう硬貨の総数が 1 枚であるのは，D(0, 3) に 1 回だけ進む B→C→D の場合より，その確率は，$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ となる。

(2)　B(2, 1) の状態から始めて，奇数回目の操作を行ったとき，A(3, 0) または C(1, 2) の状態になるので，このとき硬貨をもらうことはない。

(3)　まず，偶数回目の操作を行ったとき，B(2, 1) または D(0, 3) なので，8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう，すなわち 8 回目に D(0, 3) に初めて進む場合は，A または C を○で表すと，B→○→B→○→B→○→B→C→D となる。

ここで，B→○→B となる確率は，$\dfrac{1}{3}\cdot 1+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{9}$ となるので，求める確率は，

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{686}{6561}$$

(4)　8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚であるのは，次の場合である。

(i)　8 回目だけ D に進む場合　(3)より，その確率は $\left(\dfrac{7}{9}\right)^3\cdot\dfrac{2}{9}$ である。

(ii)　6 回目だけ D に進む場合　B→○→B→○→B→C→D→C→B からその確率は，

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}$$

(iii)　4 回目だけ D に進む場合　B→○→B→C→D→C→B→○→B からその確率は，

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}$$

(iv)　2 回目だけ D に進む場合　B→C→D→C→B→○→B→○→B からその確率は，

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}$$

(i)～(iv)より，求める確率は，$\left(\dfrac{7}{9}\right)^3\cdot\dfrac{2}{9}+\left(\dfrac{7}{9}\right)^2\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{2}{3}\times 3=\left(\dfrac{7}{9}\right)^2\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\left(\dfrac{7}{9}+2\right)=\dfrac{2450}{6561}$

［解 説］

状態の推移に関する問題です。後半の設問は 8 という微妙な数値のため，漸化式を立てようかとも思ったのですが，設問(2)の意味を考えて……。

5

問題のページへ

(1)　n が正の偶数のとき，l を自然数として，$n=2l$ とおくと，

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{2l}-1=4^l-1=(3+1)^l-1\\&=(3^l+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-2}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1}3+1)-1\\&=3(3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-2}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-3}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1})\end{aligned}$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である。

(2)　n を自然数とするとき，2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数を g とおくと，

$2^n+1=ga$ ……①，$2^n-1=gb$ ……②（a と b は互いに素）

①－②より，$2=g(a-b)$ となり，$g=2$ または $g=1$ である。

$g=2$ のとき，①は $2^n+1=2a$ となり，左辺は奇数，右辺は偶数で成立しない。

よって，$g=1$ から，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である。

(3)　異なる素数 p, q に対して，$2^{p-1}-1=pq^2$ ………③

(i)　p が偶数のとき

p は素数より $p=2$，すると，③から $2^1-1=2q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii)　p が奇数のとき

$p-1$ は偶数となり，(1)の結果から $2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である。すると，③から pq^2 は 3 の倍数となり，$p=3$ または $q=3$ である。

(ii-i)　$p=3$ のとき

③は $2^2-1=3q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii-ii)　$q=3$ のとき

③は $2^{p-1}-1=9p$ ……④となり，k を自然数として，$p=2k+1$ とおくと，

$$2^{p-1}-1=2^{2k}-1=(2^k+1)(2^k-1)$$

(2)から 2^k+1 と 2^k-1 は互いに素で，④は $(2^k+1)(2^k-1)=9(2k+1)$ となり，

$$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)\ \text{または}\ (2k+1,\ 9)$$

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)$ のとき，$k=3$ すなわち $p=7$ となる。

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(2k+1,\ 9)$ のとき，満たす k は存在しない。

(i)(ii)より，③を満たす p, q の組は，$(p,\ q)=(7,\ 3)$ のみである。

［解 説］

誘導つきの整数問題です。なお，④を満たす p を求めるために，(2)の結論を利用する方法で記しましたが，グラフをイメージして，直接的に解いても構いません。