1　　解答解説のページへ

座標平面において，x 軸上に 3 点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a, b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

2

解答解説のページへ

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2)　$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3)　三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4)　三角形 PQR の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

（操作）コインが点$(x,\ y)$にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点$(x+1,\ y)$に移動，青玉を取り出したときには点$(x,\ y+1)$に移動，白玉を取り出したときには点$(x-1,\ y-1)$に移動し，取り出した玉は袋に戻す。

最初に原点$(0,\ 0)$にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を一度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となりうる点の個数を求めよ。

(3) 座標平面上の 4 点$(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。

4

解答解説のページへ

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2)　a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3)　以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

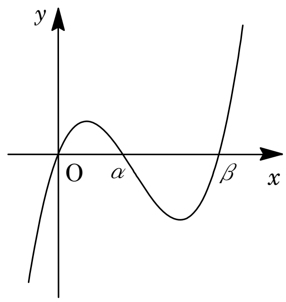
(i)　N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii)　N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii)　N は 13 で割り切れる。

1

問題のページへ



(1)　曲線$C: y = x^3 + ax^2 + bx$がx軸と 3 点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0 < \alpha < \beta)$で交わっているので，Cは，

$$y = x(x-\alpha)(x-\beta) = x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x$$

さて，Cとx軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和をSとし，$f(x) = x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x$とおくと，

$$S = \int_0^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta -f(x)dx$$
$$= \int_0^\alpha f(x)dx - \left(\int_0^\beta f(x)dx - \int_0^\alpha f(x)dx\right)$$
$$= 2\int_0^\alpha f(x)dx - \int_0^\beta f(x)dx$$
$$= 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{\alpha+\beta}{3}x^3 + \frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\alpha - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{\alpha+\beta}{3}x^3 + \frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\beta$$
$$= 2\left(\frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^4 + \alpha^3\beta}{3} + \frac{\alpha^3\beta}{2}\right) - \left(\frac{\beta^4}{4} - \frac{\alpha\beta^3 + \beta^4}{3} + \frac{\alpha\beta^3}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta + \frac{1}{12}\beta^4 - \frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

(2)　βの値を固定し，Sをαの関数と考え$S(\alpha)$と記すと，(1)から，

$$S(\alpha) = -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{\beta}{3}\alpha^3 - \frac{\beta^3}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta^4 \quad (0 < \alpha < \beta)$$
$$S'(\alpha) = -\frac{2}{3}\alpha^3 + \beta\alpha^2 - \frac{\beta^3}{6} = -\frac{1}{6}(4\alpha^3 - 6\beta\alpha^2 + \beta^3)$$
$$= -\frac{1}{6}(2\alpha - \beta)(2\alpha^2 - 2\beta\alpha - \beta^2)$$

すると，$\alpha = \frac{\beta}{2}$，$\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\beta$のとき$S'(\alpha) = 0$となり，$0 < \alpha < \beta$における$S(\alpha)$の増減は右表のようになる。

α	0	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

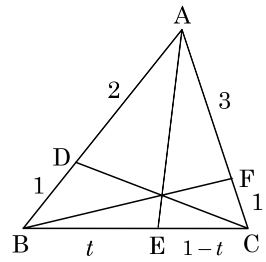
よって，$\alpha = \frac{\beta}{2}$のとき，Sは最小となる。

［解　説］

定積分と面積についての基本問題です。ただ，(2)の結論は感覚的にわかりますが。

2　　問題のページへ

(1)　△ABC において，AD : DB = 2 : 1，BE : EC = t : $1-t$，CF : FA = 1 : 3 であり，$t = t_0$ のとき, AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から,

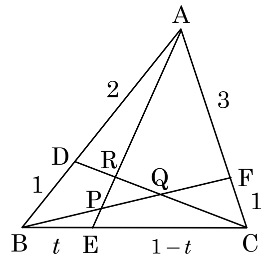


$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0 = 3(1-t_0)$ から，$t_0 = \dfrac{3}{5}$ となる。

(2)　条件より，AP $= k$AE，CR $= l$CD なので,

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=k:1-k,\quad \mathrm{CR}:\mathrm{RD}=l:1-l$$



さて, △AEC と直線 BF にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt = 3(1-k)$ より，$k = \dfrac{3}{3+t}$ となる。

また, △CDB と直線 AE にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1,\quad \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt = 3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l = 3-3t$，$l = \dfrac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3)　BQ : QF $= m : 1-m$ とし，△BFA と直線 CD にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1,\quad \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m = 4(1-m)$ より，$m = \dfrac{2}{3}$ となる。

よって，△ABC の面積が 1 から，$\triangle\mathrm{BCQ} = \dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{6}$

(4)　(2)から，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE} = \dfrac{3}{3+t} : \left(1-\dfrac{3}{3+t}\right) = 3 : t$ となり,

$$\triangle\mathrm{ABP} = \frac{3}{3+t}\triangle\mathrm{ABE} = \frac{3}{3+t}\cdot t\triangle\mathrm{ABC} = \frac{3t}{3+t}$$

また，$\mathrm{CR}:\mathrm{RD} = \dfrac{3-3t}{3-t} : \left(1-\dfrac{3-3t}{3-t}\right) = 3-3t : 2t$ から,

$$\triangle\mathrm{CAR} = \frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle\mathrm{CAD} = \frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{2-2t}{3-t}$$

すると，△PQR = △ABC − △BCQ − △CAR − △ABP より,

$$\triangle\mathrm{PQR} = 1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t} = \frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)} = \frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

［解 説］

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　袋の中から玉を 1 個取り出したとき，赤玉，青玉，白玉である確率は，それぞれ $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$，$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$，$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ である。そして，最初に原点$(0,\ 0)$に置かれたコインは，赤玉を取り出すと x 軸方向に 1，青玉を取り出すと y 軸方向に 1，白玉を取り出すと x 軸方向に -1 かつ y 軸方向に -1 だけ移動する。

さて，操作を n 回繰り返したとき，$0\leqq k\leqq n-1$ として，赤玉 k 回，青玉 $n-k-1$ 回，白玉 1 回取り出したとき，到達点は$(x,\ y)=(k-1,\ n-k-2)$から，

$$(-1,\ n-2),\ (0,\ n-3),\ (1,\ n-4),\ \cdots,\ (n-2,\ -1)$$

すなわち，線分 $x+y=n-3\ (-1\leqq x\leqq n-2)$ 上の格子点全体となる。

(2)　操作を n 回繰り返したとき，赤玉 k 回，青玉 $n-k-l$ 回，白玉 l 回取り出し，l を $0\leqq l\leqq n$ で固定すると，$0\leqq k\leqq n-l$ として，到達点は$(x,\ y)=(k-l,\ n-k-2l)$から，線分 $x+y=n-3l\ (-l\leqq x\leqq n-2l)$ 上の格子点全体となる。

その個数は $n-2l-(-l)+1=n-l+1$ より，到達点となりうる点の総数 N は，

$$N=\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)=\sum_{l'=1}^{n+1}l'=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(3)　操作を 3 回繰り返したとき，赤玉 k 回，青玉 $3-k-l$ 回，白玉 l 回取り出し，l を $0\leqq l\leqq 3$ で固定すると，$0\leqq k\leqq 3-l$ として，到達点は$(x,\ y)=(k-l,\ 3-k-2l)$から，線分 $x+y=3-3l\ (-l\leqq x\leqq 3-2l)$ 上の格子点全体となる。

(i)　$l=0$ のとき

線分 $x+y=3\ (0\leqq x\leqq 3)$ 上の格子点$(0,\ 3)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 0)$

(ii)　$l=1$ のとき

線分 $x+y=0\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上の格子点$(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ -1)$

(iii)　$l=2$ のとき

線分 $x+y=-3\ (-2\leqq x\leqq -1)$ 上の格子点$(-2,\ -1)$，$(-1,\ -2)$

(iv)　$l=3$ のとき

線分 $x+y=-6\ (-3\leqq x\leqq -3)$ 上の格子点$(-3,\ -3)$

(i)～(iv)より，到達点が与えられた正方形 D の内部または辺上にあるのは，

$$(-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (1,\ -1)$$

(a)　$(-1,\ 1)$ のとき　赤玉 0 回，青玉 2 回，白玉 1 回取り出す場合

(b)　$(0,\ 0)$ のとき　赤玉 1 回，青玉 1 回，白玉 1 回取り出す場合

(c)　$(1,\ -1)$ のとき　赤玉 2 回，青玉 0 回，白玉 1 回取り出す場合

以上より，求める確率 P_3 は，

$$P_3=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{72}$$

(4)　(3)と同様に考え，操作を $3N$ 回繰り返したとき，赤玉 k 回，青玉 $3N-k-l$ 回，白玉 l 回取り出し，l を $0\leqq l\leqq 3N$ で固定すると，$0\leqq k\leqq 3N-l$ として，到達点は $(x,\ y)=(k-l,\ 3N-k-2l)$ から，線分 $x+y=3N-3l$ $(-l\leqq x\leqq 3N-2l)$ 上の格子点全体となる。

さて，$3N-3l\leqq -3$ または $3N-3l\geqq 3$ のとき，到達点はすべて与えられた正方形 D の外部となるので，D の内部または辺上にあるのは，$3N-3l=0$ $(l=N)$ の場合のみである。

このとき，到達点は線分 $x+y=0$ $(-N\leqq x\leqq N)$ 上の格子点全体となる。

よって，到達点が与えられた正方形 D の内部または辺上にあるのは，

$(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ -1)$

(a)　$(-1,\ 1)$ のとき

$k-N=-1$ から赤玉 $N-1$ 回，青玉 $N+1$ 回，白玉 N 回取り出す場合で，確率は，

$$\frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}=\frac{2N}{3(N+1)}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}$$

(b)　$(0,\ 0)$ のとき

$k-N=0$ から赤玉 N 回，青玉 N 回，白玉 N 回取り出す場合で，確率は，

$$\frac{(3N)!}{N!N!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{N}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}=\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}$$

(c)　$(1,\ -1)$ のとき

$k-N=1$ から赤玉 $N+1$ 回，青玉 $N-1$ 回，白玉 N 回取り出す場合で，確率は，

$$\frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}=\frac{3N}{2(N+1)}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}$$

以上より，求める確率 P_{3N} は，

$$\begin{aligned}P_{3N}&=\frac{2N}{3(N+1)}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}+\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}+\frac{3N}{2(N+1)}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}\\&=\left\{\frac{2N}{3(N+1)}+1+\frac{3N}{2(N+1)}\right\}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}=\frac{19N+6}{N+1}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^3}\end{aligned}$$

［解　説］

問題の設定が微妙にややこしい確率問題です。確率計算については，かなりの量があり，時間的に非常に厳しいものとなっています。

4

問題のページへ

(1)　10^n を 13 で割った余りが a_n より，q_n を自然数として，$10^n = 13q_n + a_n$ と表せ,

$$10^{n+1} = 10\cdot 10^n = 10(13q_n + a_n) = 13(10q_n) + 10a_n$$

すると，10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は，$10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2)　10^1 を 13 で割った余りは 10 より，$a_1 = 10$ である。

そして，(1)の結論を当てはめていくと，a_2 は $10a_1 = 100$ を 13 で割った余りに等しく，$100 = 13\times 7 + 9$ より $a_2 = 9$ である。

a_3 は $10a_2 = 90$ を 13 で割った余り $(90 = 13\times 6 + 12)$ より，$a_3 = 12$ である。

a_4 は $10a_3 = 120$ を 13 で割った余り $(120 = 13\times 9 + 3)$ より，$a_4 = 3$ である。

a_5 は $10a_4 = 30$ を 13 で割った余り $(30 = 13\times 2 + 4)$ より，$a_5 = 4$ である。

a_6 は $10a_5 = 40$ を 13 で割った余り $(40 = 13\times 3 + 1)$ より，$a_6 = 1$ である。

(3)　自然数 N を十進法で表示したとき，最初の桁の数字を k $(1\leqq k\leqq 9)$，最後の桁の数字を l $(0\leqq l\leqq 9)$ とおくと，条件(i)(ii)より，

$$N = k\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + l$$

ここで，(2)の結論を合同式を用い，mod13 で記すと，

$$10^5 \equiv 4,\ 10^4 \equiv 3,\ 10^3 \equiv 12,\ 10^2 \equiv 9,\ 10^1 \equiv 10$$

これより，$N \equiv 4k + 2\cdot 3 + 1\cdot 9 + 6\cdot 10 + l = 4k + l + 75 \equiv 4k + l + 10$

さらに，条件(iii)から N が 13 で割り切れることから，$4k + l + 10$ が 13 の倍数となり，$14 \leqq 4k + l + 10 \leqq 55$ より，

(a)　$4k + l + 10 = 26$ のとき　$4k + l = 16$ から $(k,\ l) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0)$

(b)　$4k + l + 10 = 39$ のとき　$4k + l = 29$ から $(k,\ l) = (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1)$

(c)　$4k + l + 10 = 52$ のとき　$4k + l = 42$ から $(k,\ l) = (9,\ 6)$

(a)〜(c)より，求める自然数 N は，

220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166

［解 説］

うまく誘導のついた整数問題です。なお，(3)の不定方程式は，一般的に解くよりは，値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また，(1)から合同式を利用してもよかったのですが……。