1

解答解説のページへ

座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y=\log x \ (x>0), \quad C_2 : y=(x-1)(x-a)$$

とする。ただし, a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P, Q で交わり, P, Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a>1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n}$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2)　$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3)　三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4)　三角形 PQR の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $P_0(1,\ 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを 1 回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

（規則）(i)　1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。たとえば，コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii)　6 の目が出た場合は，x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない。たとえば，コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き，1 つのサイコロを続けて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1)　2 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(2)　3 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(3)　n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2)　a_1，a_2，…，a_6 を求めよ。

(3)　以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i)　N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii)　N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),\quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2)　次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

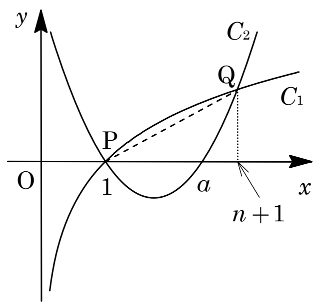
$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3)　次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　$C_1 : y=\log x$ と $C_2 : y=(x-1)(x-a)$ が，P(1, 0)，Q$(n+1,\ \log(n+1))$ (n は自然数)で交わっているので,

$$\log(n+1)=(n+1-1)(n+1-a)$$
$$a=n+1-\frac{\log(n+1)}{n}$$

ここで，$a-1=n-\dfrac{\log(n+1)}{n}=\dfrac{1}{n}\{n^2-\log(n+1)\}$

となり，$x \geqq 1$ において，$f(x)=x^2-\log(x+1)$ とおくと,

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x+1}=\frac{2x(x+1)-1}{x+1}>0$$

これより，$f(x) \geqq f(1)=1-\log 2>0$ なので，$a-1>0$ より $a>1$ である。

(2)　曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積 S_n は,

$$S_n=\int_1^{n+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(n+1-1)\log(n+1)$$
$$=\left[\,x\log x\,\right]_1^{n+1}-\int_1^{n+1}dx-\frac{1}{2}n\log(n+1)$$
$$=(n+1)\log(n+1)-(n+1-1)-\frac{1}{2}n\log(n+1)=\frac{n+2}{2}\log(n+1)-n$$

また，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積 T_n は，PQ : $y=px+q$ とおくと,

$$T_n=\int_1^{n+1}\{px+q-(x-1)(x-a)\}dx=-\int_1^{n+1}(x-1)(x-n-1)dx$$
$$=\frac{1}{6}(n+1-1)^3=\frac{n^3}{6}$$

(3)　$$\frac{S_n}{n\log T_n}=\frac{\dfrac{n+2}{2}\log(n+1)-n}{n\log\dfrac{n^3}{6}}=\frac{n+2}{2n}\cdot\frac{\log(n+1)}{3\log n-\log 6}-\frac{1}{3\log n-\log 6}$$

ここで，$\dfrac{\log(n+1)}{3\log n-\log 6}=\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\left(3-\dfrac{\log 6}{\log n}\right)^{-1}$ と変形して,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(n+1)}{\log n}-1\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\dfrac{n+1}{n}}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}=0$$

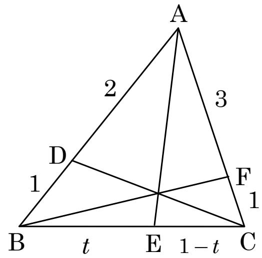
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3^{-1}-0=\frac{1}{6}$ である。

［解　説］

面積計算および極限に関する基本的な問題です。(3)の $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$ については，n が大きくなると $\log(n+1) \fallingdotseq \log n$ という感覚からです。

2

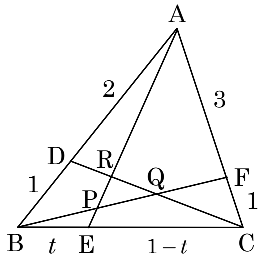
問題のページへ



(1)　$\triangle$ABC において，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=2:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=t:1-t$，$\mathrm{CF}:\mathrm{FA}=1:3$ であり，$t=t_0$ のとき, AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0=3(1-t_0)$ から，$t_0=\frac{3}{5}$ となる。



(2)　条件より，$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ なので,

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=k:1-k,\quad \mathrm{CR}:\mathrm{RD}=l:1-l$$

さて, $\triangle$AEC と直線 BF にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt=3(1-k)$ より，$k=\frac{3}{3+t}$ となる。

また, $\triangle$CDB と直線 AE にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1,\quad \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt=3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l=3-3t$，$l=\frac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3)　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QF}=m:1-m$ とし，$\triangle$BFA と直線 CD にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1,\quad \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m=4(1-m)$ より，$m=\frac{2}{3}$ となる。

よって，$\triangle$ABC の面積が 1 から，$\triangle\mathrm{BCQ}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{6}$

(4)　(2)から，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=\frac{3}{3+t}:\left(1-\frac{3}{3+t}\right)=3:t$ となり,

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{3+t}\triangle\mathrm{ABE}=\frac{3}{3+t}\cdot t\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3t}{3+t}$$

また，$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=\frac{3-3t}{3-t}:\left(1-\frac{3-3t}{3-t}\right)=3-3t:2t$ から,

$$\triangle\mathrm{CAR}=\frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle\mathrm{CAD}=\frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2-2t}{3-t}$$

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{BCQ}-\triangle\mathrm{CAR}-\triangle\mathrm{ABP}$ より,

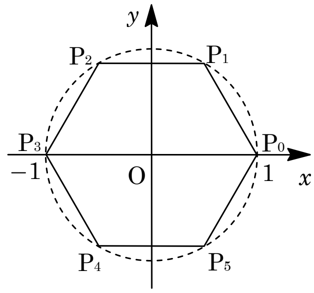
$$\triangle\mathrm{PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

［解 説］

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

3

問題のページへ



(1)　2 回サイコロを投げ，はじめに P_0 に置かれたコインが与えられた規則にしたがって P_0 に移動するのは，出たサイコロの目の（1 回目, 2 回目）の組合せが，

$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 3)$，$(4,\ 2)$

$(5,\ 1)$，$(6,\ 6)$

これより，この確率は $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$ となる。

(2)　3 回サイコロを投げ，コインが P_0 の位置にあるのは，

(i)　2 回投げた後に P_0 の位置にあるとき

3 回目に出た目が 6 の場合だけより，このときの確率は(1)から $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$ である。

(ii)　2 回投げた後に P_0 以外の位置にあるとき

2 回投げた後に P_k $(1\leqq k\leqq 5)$ にあるときは，3 回目に出た目が $6-k$ の場合だけより，このときの確率は(1)から $\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$ である。

(i)(ii)より，3 回サイコロを投げた後に P_0 の位置にある確率は，$\dfrac{1}{36}+\dfrac{5}{36}=\dfrac{1}{6}$ となる。

(3)　n 回サイコロを投げ，コインが P_0 の位置にある確率を a_n，P_0 以外の位置にある確率を b_n とする。(2)と同様に考えると，

$$a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}b_n=\frac{1}{6}(a_n+b_n)$$

ここで，$a_n+b_n=1$ から $a_{n+1}=\dfrac{1}{6}$，すなわち $n\geqq 2$ で $a_n=\dfrac{1}{6}$ である。

さらに，1 回サイコロを投げ，コインが P_0 の位置にあるのは，6 の目が出たときだけなので，その確率 $a_1=\dfrac{1}{6}$ である。

以上より，n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

［解　説］

確率の基本問題ですが，3 つの設問の結論はすべて同じです。意外すぎて，とまどってしまいます。

4　　問題のページへ

(1)　10^n を 13 で割った余りが a_n より，q_n を自然数として，$10^n = 13q_n + a_n$ と表せ，

$$10^{n+1} = 10\cdot 10^n = 10(13q_n + a_n) = 13(10q_n) + 10a_n$$

すると，10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は，$10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2)　10^1 を 13 で割った余りは 10 より，$a_1 = 10$ である。

そして，(1)の結論を当てはめていくと，a_2 は $10a_1 = 100$ を 13 で割った余りに等しく，$100 = 13\times 7 + 9$ より $a_2 = 9$ である。

a_3 は $10a_2 = 90$ を 13 で割った余り $(90 = 13\times 6 + 12)$ より，$a_3 = 12$ である。

a_4 は $10a_3 = 120$ を 13 で割った余り $(120 = 13\times 9 + 3)$ より，$a_4 = 3$ である。

a_5 は $10a_4 = 30$ を 13 で割った余り $(30 = 13\times 2 + 4)$ より，$a_5 = 4$ である。

a_6 は $10a_5 = 40$ を 13 で割った余り $(40 = 13\times 3 + 1)$ より，$a_6 = 1$ である。

(3)　自然数 N を十進法で表示したとき，最初の桁の数字を k $(1\leqq k\leqq 9)$，最後の桁の数字を l $(0\leqq l\leqq 9)$ とおくと，条件(i)(ii)より，

$$N = k\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + l$$

ここで，(2)の結論を合同式を用い，mod13 で記すと，

$$10^5 \equiv 4,\ 10^4 \equiv 3,\ 10^3 \equiv 12,\ 10^2 \equiv 9,\ 10^1 \equiv 10$$

これより，$N \equiv 4k + 2\cdot 3 + 1\cdot 9 + 6\cdot 10 + l = 4k + l + 75 \equiv 4k + l + 10$

さらに，条件(iii)から N が 13 で割り切れることから，$4k + l + 10$ が 13 の倍数となり，$14\leqq 4k + l + 10\leqq 55$ より，

(a)　$4k + l + 10 = 26$ のとき　$4k + l = 16$ から $(k,\ l) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0)$

(b)　$4k + l + 10 = 39$ のとき　$4k + l = 29$ から $(k,\ l) = (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1)$

(c)　$4k + l + 10 = 52$ のとき　$4k + l = 42$ から $(k,\ l) = (9,\ 6)$

(a)～(c)より，求める自然数 N は，

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

［解　説］

うまく誘導のついた整数問題です。なお，(3)の不定方程式は，一般的に解くよりは，値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また，(1)から合同式を利用してもよかったのですが……。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき，整数 n に対してド・モアブルの定理より，

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\,,\ \ \frac{1}{z^n}=z^{-n}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

これより，$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$，$z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$ となり，

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right),\ \ \sin n\theta=\frac{1}{2i}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)=-\frac{i}{2}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$

(2)　$\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1\ (0\leqq x<2\pi)$ ……(＊)に対し，

$$-2\sin 2x\sin(-x)+1-2\sin^2 x=1,\ \ 2\sin 2x\sin x-2\sin^2 x=0$$

すると，$4\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x=0$ から，$2\sin^2 x(2\cos x-1)=0$

よって，$\sin x=0$ または $\cos x=\dfrac{1}{2}$ から，(＊)の解は，

$$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

(3)　$S=\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ$ とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1-\cos 40^\circ}{2}+\frac{1-\cos 80^\circ}{2}+\frac{1-\cos 120^\circ}{2}+\frac{1-\cos 160^\circ}{2}\\&=\frac{1}{2}\cdot 4-\frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ-\frac{1}{2}+\cos 160^\circ\right)\\&=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ)=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+2\cos 120^\circ\cos 40^\circ)\\&=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\{\cos 40^\circ+(-1)\cos 40^\circ\}=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

［解 説］

複素数の計算問題ですが，(2)，(3)は(1)を無視して，普通に三角関数の変形により解いています。出題意図は，3 倍角の公式とか複素数列の和の扱いなどでしょうか。もちろん受験生はこんなことを気にする必要はないのですが……。