1　　解答解説のページへ

定数 $a>0$ に対し，曲線 $y=a\tan x$ の $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y=\sin 2x$ の $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。

(2)　a が(1)の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする。P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ。

(3)　a が(2)で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

2 つの定数 $a>0$ および $b>0$ に対し，座標空間内の 4 点を $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を a, b を用いて表せ。

(2) さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a, b を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

初項$a_1 = 1$，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$を考える。以下の問いに答えよ。

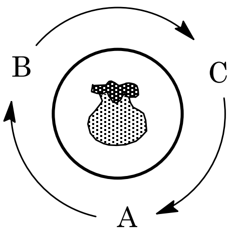
(1)　$\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2)　$\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3)　初項から第 n 項までの積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

4

解答解説のページへ



赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルのまわりに A, B, C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール(a), (b), (c)に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

(a)　赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b)　青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

(c)　白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とする。ただし，$a_1=1$，$b_1=c_1=0$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2)　$d_n=a_n+b_n+c_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。

(3)　自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

5

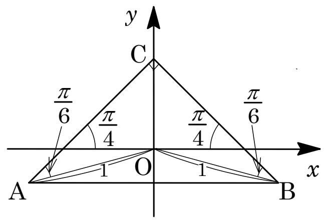
解答解説のページへ

2 つの複素数 $\alpha=10000+10000i$ と $w=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n=\alpha w^n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n|\leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 右図のように，複素数平面上の△ABC は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を 1 つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお, A, B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A, B の距離はともに 1 である。点 P_n が△ABC の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



1

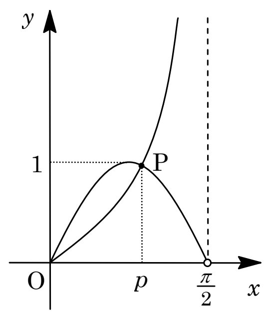
問題のページへ

(1)　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$C_1 : y = a\tan x$ $(a > 0)$ ……①，$C_2 : y = \sin 2x$ ……②を連立して，

$$a\tan x = \sin 2x\ ,\ \frac{a\sin x}{\cos x} = 2\sin x\cos x$$

すると，$x \neq 0$ から $2\cos^2 x = a$，すなわち $\cos x = \sqrt{\dfrac{a}{2}}$ となり，①と②が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で交点をもつための a の条件は,

$$0 < \sqrt{\frac{a}{2}} < 1,\ 0 < a < 2$$



(2)　(1)より，$\cos p = \sqrt{\dfrac{a}{2}}$ ………③

さて，①より $y' = \dfrac{a}{\cos^2 x}$，②より $y' = 2\cos 2x$ なので，条件から P における接線が直交することより,

$$\frac{a}{\cos^2 p}\cdot 2\cos 2p = -1,\ 2a(2\cos^2 p - 1) = -\cos^2 p$$

③を代入すると $2a(a-1) = -\dfrac{a}{2}$ となり，$2a^2 - \dfrac{3}{2}a = 0$

$0 < a < 2$ より $a = \dfrac{3}{4}$ となり，このとき $\cos 2p = 2\cdot\dfrac{a}{2} - 1 = -\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　$a = \dfrac{3}{4}$ のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \int_0^p \Bigl(\sin 2x - \frac{3}{4}\tan x\Bigr)dx = \Bigl[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\log|\cos x|\Bigr]_0^p$$

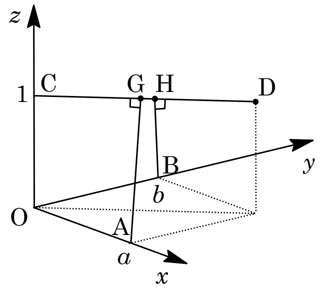
$$= -\frac{1}{2}(\cos 2p - 1) + \frac{3}{4}\log|\cos p| = -\frac{1}{2}\Bigl(-\frac{1}{4} - 1\Bigr) + \frac{3}{4}\log\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。計算は穏やかです。

２

問題のページへ



(1) $a>0$, $b>0$ のとき, $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$ に対し, 線分 CD 上の点 G を, $0\leqq t\leqq 1$ として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=t(a,\ b,\ 1)+(1-t)(0,\ 0,\ 1)$$
$$=(at,\ bt,\ 1)$$

すると, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(a(t-1),\ bt,\ 1)$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(a,\ b,\ 0)$ が垂直なので, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より,

$$a^2(t-1)+b^2t=0,\ t=\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

したがって, $\mathrm{G}\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$ となる。

(2) (1)と同様に, 線分 CD 上の点 H を, $0\leqq s\leqq 1$ として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(as,\ bs,\ 1)$ と表すと, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(as,\ b(s-1),\ 1)$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(a,\ b,\ 0)$ が垂直なので, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より,

$$a^2s+b^2(s-1)=0,\ s=\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

したがって, $\mathrm{H}\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)$ となる。

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ のなす角を θ とし, 内積の定義を利用すると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=a^2s(t-1)+b^2t(s-1)+1=(a^2+b^2)st-a^2s-b^2t+1$$
$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+1=\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=a^2(t-1)^2+b^2t^2+1=(a^2+b^2)t^2-2a^2t+a^2+1$$
$$=\frac{a^4}{a^2+b^2}-\frac{2a^4}{a^2+b^2}+a^2+1=\frac{a^2+b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2=a^2s^2+b^2(s-1)^2+1=(a^2+b^2)s^2-2b^2s+b^2+1$$
$$=\frac{b^4}{a^2+b^2}-\frac{2b^4}{a^2+b^2}+b^2+1=\frac{a^2+b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$$

よって, $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}|}=\dfrac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}$ となる。

［解　説］

空間ベクトルの基本問題です。計算量は多めですが, 難しいというわけではありません。

3

問題のページへ

(1) 初項 1，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$の一般項は，$a_n=1+4(n-1)=4n-3$

さて，a_nが 7 の倍数となるのは，kを自然数として，$4n-3=7k$ ………①

ここで，$4\times(-1)-3=7\times(-1)$から，①を変形すると，

$$4(n+1)=7(k+1)\ \cdots\cdots\text{②}$$

すると，4 と 7 は互いに素より，lを整数として$n+1=7l$，$k+1=4l$となり，

$$n=7l-1,\ k=4l-1$$

そこで，$1\leqq n\leqq 600$，$k\geqq 1$から，$1\leqq 7l-1\leqq 600$，$4l-1\geqq 1$となり，

$$\frac{1}{2}\leqq l\leqq\frac{601}{7}=85+\frac{6}{7}$$

これより，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85$となり，7 の倍数である項の個数は 85 である。

(2) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数の項を取り出してb_lとおくと，

$$b_l=a_{7l-1}=4(7l-1)-3=28l-7=7(4l-1)\quad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85)$$

さて，a_nが7^2の倍数，すなわちb_lが 7 の倍数となるのは，mを自然数として，

$$4l-1=7m\ \cdots\cdots\text{③}$$

ここで，$4\times 2-1=7\times 1$から，③を変形すると，

$$4(l-2)=7(m-1)$$

すると，4 と 7 は互いに素より，pを整数として$l-2=7p$，$m-1=4p$となり，

$$l=7p+2,\ m=4p+1$$

そこで，$1\leqq l\leqq 85$，$m\geqq 1$から，$1\leqq 7p+2\leqq 85$，$4p+1\geqq 1$となり，

$$0\leqq p\leqq\frac{83}{7}=11+\frac{6}{7}$$

これより，$p=0,\ 1,\ \cdots,\ 11$となり，7^2の倍数である項の個数は 12 である。

(3) a_nが 7 の倍数のとき，$n=7l-1\ (l\geqq 1)$となり，このnを書き並べると，

$$6,\ \underline{13},\ 20,\ 27,\ 34,\ 41,\ 48\ |\ 55,\ \underline{62},\ 69,\ 76,\ 83,\ 90,\ 97\ |\ 104,\ \underline{111},\ 118,\ \cdots\cdots$$

そして，この数列を 7 個ずつの区画に分け，左から第 1 群，第 2 群，…と呼ぶ。

また，a_nが7^2の倍数の項を取り出してc_pとおくと，$l=7p+2$から，

$$n=7(7p+2)-1=49p+13\quad(p\geqq 0)$$

すると，上記の数列の下線をつけた数が対応して，

$$c_p=a_{49p+13}=4(49p+13)-3=196p+49=7^2(4p+1)\quad(p\geqq 0)$$

さらに，a_nが7^3の倍数，すなわちc_pが 7 の倍数になるのは，同様にすると，qを 0 以上の整数として，

$$4p+1=7q\ \cdots\cdots\text{④}$$

そして，④を満たす最小のp，qの値は$(p,\ q)=(5,\ 3)$であり，このときのnは，$n=49\cdot 5+13=258$となり，$a_{258}=4\cdot 258-3=1029=7^3\cdot 3$である。

このn$=258$は，$7l-1=258$から$l=37$となり，上記の数列の第 6 群に属することがわかる。

さて，積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数nについては，素因数 7 の個数に注目し，これが合計 45 個以上となる最小のnを考えればよい。

まず，第 5 群まではa_nに7^3の倍数がないので，1 つの群内に素因数 7 が$7+1=8$個ずつとなり，その総数は$8\times5=40$個である。

すると，素因数 7 の残り 5 個について調べるために，第 6 群を書き並べると，

$$|\ 251,\ \underline{258},\ 265,\ 272,\ \cdots\cdots$$

これより，a_{251}は 7 の倍数，a_{258}は7^3の倍数，a_{265}は 7 の倍数，…となるので，積$a_{251}a_{258}a_{265}$に素因数 7 が 5 個あることがわかる。

以上より，積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数nは，$n=265$である。

［解 説］

整数と数列の融合問題です。解答例では，頻出の(1)の結果を利用して，(2)につなげています。なお，(3)は群数列の考え方をもとにしていますが，45 という数値が意味深長で，詰めがかなり面倒でした。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　条件より，赤玉，青玉，白玉を取り出す確率は，それぞれ$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{4}$である。

さて，与えられたルールによって，A が 4 回目に勝つ場合は次の 2 通りである。

(i)　3 回目まで青玉 3 回取り出し，4 回目に赤玉を取り出すとき

(ii)　3 回目まで白玉 3 回取り出し，4 回目に赤玉を取り出すとき

(i)(ii)より，このときの確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{64}$ である。

次に，A が 7 回目に勝つ場合は次の 3 通りである。

(i)　6 回目まで青玉 6 回取り出し，7 回目に赤玉を取り出すとき

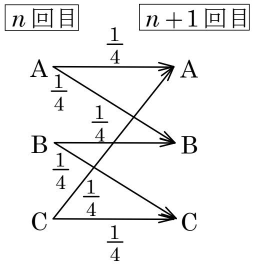
(ii)　6 回目まで青玉 3 回，白玉 3 回取り出し，7 回目に赤玉を取り出すとき

(iii)　6 回目まで白玉 6 回取り出し，7 回目に赤玉を取り出すとき

(i)～(iii)より，このときの確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\frac{1}{2}+\frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\frac{1}{2}=22\times\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\frac{1}{2}=\frac{11}{4096}$$

(2)　A, B, C が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とすると，$a_1=1$，$b_1=c_1=0$ となり，



$$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}c_n\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$d_n=a_n+b_n+c_n$ とおくと，①＋②＋③から $d_{n+1}=\dfrac{1}{2}d_n$ となり，

$$d_n=d_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(a_1+b_1+c_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

(3)　③④より，$c_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-a_n-c_n\right\}+\dfrac{1}{4}c_n$，$c_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{4}a_n\cdots\cdots\cdots⑤$

①より $c_n=4a_{n+1}-a_n$ となり，⑤に代入すると，

$$4a_{n+2}-a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{4}a_n,\quad a_{n+2}=\frac{1}{4}a_{n+1}-\frac{1}{16}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\cdots\cdots\cdots⑥$$

すると，$n\geqq 3$ に対し，⑥から，$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n-\dfrac{1}{16}a_{n-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$ となり，

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}a_{n-1}-\frac{1}{16}a_{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}-\frac{1}{16}a_{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\\&=-\frac{1}{64}a_{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=-\frac{1}{64}a_{n-2}+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\end{aligned}$$

［解　説］

標準的な確率と漸化式の問題ですが，(2)と(3)は(1)と関係なく解いています。

5

問題のページへ

(1)　$\alpha=10000+10000i$ と $w=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i$ を極形式で表すと,

$$\alpha=10000\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ w=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

すると，$z_n=\alpha w^n$ から，$|z_n|=|\alpha||w|^n=10000\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

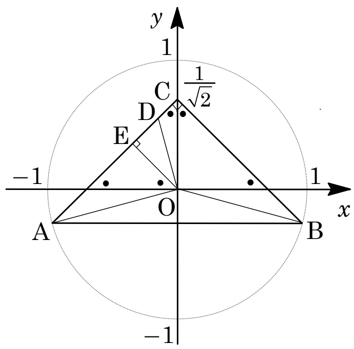
$$\arg z_n=\arg\alpha+n\arg w=\frac{\pi}{4}+\frac{n}{6}\pi=\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{6}\right)\pi$$

(2)　$|z_n|\leqq 1$ のとき，$10000\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\leqq 1$ から，$\log_{10}10000\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\leqq 0$

$$4+\frac{1}{2}\log_{10}2-n\log_{10}2\leqq 0,\ n\geqq\frac{4+\frac{1}{2}\log_{10}2}{\log_{10}2}=\frac{4}{\log_{10}2}+\frac{1}{2}$$

よって，$n\geqq\dfrac{4}{0.301}+0.5>13.7$ となり，最小の自然数 n は $n=14$ である。

(3)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{OC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ が△ABC の内部に含まれるためには，$|z_n|\leqq 1$ であることが必要である。すると，(2)から $n\geqq 14$ となる。



(i)　$n=14$ のとき

$$\arg z_{14}=\left(\frac{1}{4}+\frac{14}{6}\right)\pi=\frac{31}{12}\pi=2\pi+\frac{7}{12}\pi$$

$$|z_{14}|=10000\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{14}=\frac{10^4\times\sqrt{2}}{2^{14}}$$

これより，P_{14} は半直線 OD 上にあり,

$$\frac{10^4\times\sqrt{2}}{2^{14}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{10^4-2^{13}}{2^{13}\times\sqrt{2}}>0$$

よって，$|z_{14}|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathrm{OC}>\mathrm{OD}$ となり，P_{14} は△ABC の内部に含まれない。

(ii)　$n=15$ のとき

$$\arg z_{15}=\left(\frac{1}{4}+\frac{15}{6}\right)\pi=\frac{11}{4}\pi=2\pi+\frac{3}{4}\pi,\ |z_{15}|=10000\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}=\frac{10^4\times\sqrt{2}}{2^{15}}$$

これより，P_{15} は半直線 OE 上にあり，$\dfrac{10^4\times\sqrt{2}}{2^{15}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{10^4\times\sqrt{2}-2^{14}}{2^{15}}<0$

よって，$|z_{15}|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{4}=\mathrm{OE}$ となり，P_{15} は△ABC の内部に含まれる。

(i)(ii)より，P_n が△ABC の内部に含まれる最小の自然数 n は $n=15$ である。

［解 説］

複素数平面と極形式が題材になっています。(2)が誘導となり(3)につながっていますが，それでもやや面倒です。