1

解答解説のページへ

座標平面内の曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし, a, b は実数, $c>0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) a, b をそれぞれ c を用いて表せ。

(2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し，$L=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくとき，次の等式を示せ。

$$L=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

(2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また，L の最小値は $\dfrac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$ であることを示せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

3 つの部品 a, b, c からなる製品が多数入った箱がある。製品を 1 つ取り出したとき，部品 a, b, c が不良品である確率について次のことがわかっている。

・部品 a が不良品である確率は p である。

・部品 a が不良品でないとき，部品 b が不良品である確率は q である。

・部品 a が不良品であるとき，部品 b も不良品である確率は $3q$ である。

・部品 b が不良品でないとき，部品 c が不良品である確率は r である。

・部品 b が不良品であるとき，部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし，$0<p<1$，$0<q<\dfrac{1}{3}$，$0<r<\dfrac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

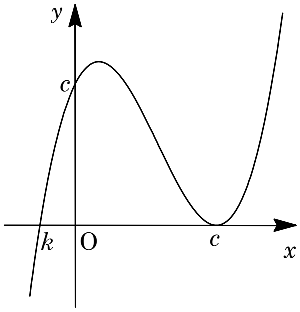
(1) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b の少なくとも一方が不良品である確率を p, q を用いて表せ。

(2) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 c が不良品である確率を p, q, r を用いて表せ。

(3) 製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき，部品 b も不良品である確率を p, q を用いて表せ。

1

問題のページへ



(1)　曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ……①は，点 $(c,\ 0)$ $(c > 0)$ で x 軸に接していることより，k を実数として，$y = (x-c)^2(x-k)$ と表せる。

さらに，$x = 0$ のとき $y = c$ から $-c^2k = c$ となり，$k = -\dfrac{1}{c}$ より，

$$y = (x-c)^2\left(x + \frac{1}{c}\right) \cdots\cdots\cdots ②$$

②を展開すると，$y = x^3 + \left(-2c + \dfrac{1}{c}\right)x^2 + (c^2 - 2)x + c$ となり，①と比べて，

$$a = -2c + \frac{1}{c},\ b = c^2 - 2$$

(2)　曲線②と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_{-\frac{1}{c}}^{c} (x-c)^2\left(x + \frac{1}{c}\right)dx = \int_{-\frac{1}{c}}^{c} (x-c)^2\left(x - c + c + \frac{1}{c}\right)dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{c}}^{c} \left\{(x-c)^3 + \left(c + \frac{1}{c}\right)(x-c)^2\right\}dx = \left[\frac{(x-c)^4}{4} + \left(c + \frac{1}{c}\right)\frac{(x-c)^3}{3}\right]_{-\frac{1}{c}}^{c}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{c} - c\right)^4 - \frac{1}{3}\left(c + \frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{c} - c\right)^3 = \frac{1}{12}\left(c + \frac{1}{c}\right)^4$$

ここで，$c > 0$ より，相加平均と相乗平均の関係から，$c + \dfrac{1}{c} \geqq 2\sqrt{c \cdot \dfrac{1}{c}} = 2$ である。なお，等号は $c = \dfrac{1}{c}$ すなわち $c = 1$ のときに成立する。

したがって，$S \geqq \dfrac{1}{12} \cdot 2^4 = \dfrac{4}{3}$ から，S を最小にする c の値は $c = 1$ である。

［解　説］

微積分の総合問題です。(2)の積分計算は，結果だけでなく過程も記しましたが，これは準公式といっても差し支えないものです

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$\mathrm{mod}\,7$ で記すと $2^3 \equiv 1$ から，2^n を 7 で割った余り r は，k を 0 以上の整数として，

(i)　$n = 3k+1$ のとき　$2^{3k+1} = (2^3)^k \cdot 2 \equiv 1^k \cdot 2 \equiv 2$ より，$r = 2$

(ii)　$n = 3k+2$ のとき　$2^{3k+2} = (2^3)^k \cdot 4 \equiv 1^k \cdot 4 \equiv 4$ より，$r = 4$

(iii)　$n = 3k+3$ のとき　$2^{3k+3} = (2^3)^{k+1} \equiv 1^{k+1} \equiv 1$ より，$r = 1$

(2)　$m = 101101101101101101_{(2)}$ を 10 進法で表し，$\mathrm{mod}\,7$ で記すと，

$$m = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^8 + 2^9 + 2^{11} + 2^{12} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{17}$$

$$\equiv 1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4 = 30 \equiv 2$$

したがって，m を 7 で割った余りは 2 である。

［解　説］

基本的な整数問題です。いろいろな記述方法が考えられますが，解答例では合同式を用いました。

3

問題のページへ

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$とするとき，$L=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$は,

$$L=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\vec{x}-\vec{a}|^2+|\vec{x}-\vec{b}|^2+|\vec{x}-\vec{c}|^2$$
$$=|\vec{x}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{x}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{x}+|\vec{b}|^2+|\vec{x}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{x}+|\vec{c}|^2$$
$$=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

(2)　(1)より，$L=3\left\{|\vec{x}|^2-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}\right\}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$と変形し,

$$L=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2-\frac{1}{3}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2+\frac{2}{3}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)-\frac{2}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2+\frac{1}{3}(|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2)$$

これより，Lを最小にするのは，$\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$すなわち点Pが△ABCの重心のときである。

そして，最小値は$\frac{1}{3}(|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2)$すなわち$\frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$である。

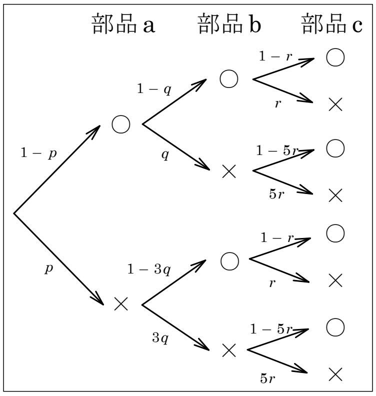
［解 説］

内積の計算がメインとなっている平面ベクトルの基本題です。(2)での式変形は，平方完成の方法が対応しています。

4

問題のページへ

(1)　与えられた題意を，不良品でないものを○，不良品であるものを×として，その確率とともに表すと，右図のようになる。



さて，製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b がともに不良品でない確率は，$(1-p)(1-q)$ より，少なくとも一方が不良品である確率は，

$$1-(1-p)(1-q)=p+q-pq$$

(2)　製品を 1 つ取り出したとき，部品 c が不良品である確率は，

$$(1-p)(1-q)r+(1-p)q\cdot 5r+p(1-3q)r+p\cdot 3q\cdot 5r$$
$$=(1-p)(1+4q)r+p(1+12q)r=(1+4q+8pq)r\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　製品を 1 つ取り出したとき，部品 c と部品 b が不良品である確率は，

$$(1-p)q\cdot 5r+p\cdot 3q\cdot 5r=5(1+2p)qr\cdots\cdots\cdots②$$

したがって，製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であったとき，部品 b も不良品である条件付き確率は，①②より，

$$\frac{5(1+2p)qr}{(1+4q+8pq)r}=\frac{5(1+2p)q}{1+4q+8pq}$$

［解　説］

確率の基本問題です。題意を解答例のように図でまとめておくと，後はこれを読むだけとなります。