1

解答解説のページへ

座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2-y^2=1$ のうち $x\geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x=d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。

2

解答解説のページへ

原点を中心とする半径 3 の半円 $C: x^2+y^2=9\ \ (y\geqq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を $2:1$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $(-3,\ 0)$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1)の図形 S から(2)の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないとし，$f(x)=2x^3+a^2x^2+2b^2x+1$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2)　$f(x)=0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3)　$f(x)=0$ を満たす有理数 x が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

1

問題のページへ

xy 平面上にある双曲線 $x^2-y^2=1\ (x\geqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q,\ 0)$，および z 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ に対し，直線 AP の方程式は，t を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)+t(p,\ q,\ -1)=(tp,\ tq,\ 1-t)\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$p^2-q^2=1\ (p\geqq 1)\cdots\cdots②$である。

ここで，直線 AP と平面 $x=d\ (d>0)\cdots\cdots③$との交点は，①③を連立して，$tp=d$ すなわち $t=\dfrac{d}{p}$ となり，$y=\dfrac{dq}{p}\cdots\cdots④$，$z=1-\dfrac{d}{p}\cdots\cdots⑤$である。

すると，⑤より，$\dfrac{d}{p}=1-z$ から $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-z}{d}$ となり，$1-z>0$ で $p=\dfrac{d}{1-z}\cdots\cdots\cdots⑥$

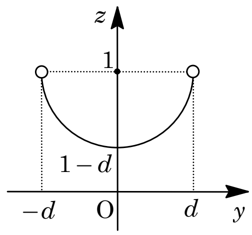
④⑥から，$y=(1-z)q$ となり，$q=\dfrac{y}{1-z}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑥⑦を②に代入すると，$\dfrac{d^2}{(1-z)^2}-\dfrac{y^2}{(1-z)^2}=1\left(\dfrac{d}{1-z}\geqq 1\right)$ となり，

$$d^2-y^2=(1-z)^2,\ y^2+(z-1)^2=d^2\cdots\cdots\cdots⑧$$

また，$1-z>0$ から $1-z\leqq d$ となり，$1-d\leqq z<1\cdots\cdots\cdots⑨$

したがって，求める交点の軌跡は，平面 $x=d$ 上で中心が $(d,\ 0,\ 1)$，半径が d の円の $z<1$ の部分である。図示すると，右図の実線部となる。



［解　説］

軌跡の典型題です。大雑把な方針は，②④⑤から p と q を消去して y と z の関係を求めることです。

2

問題のページへ

(1) 半円 $C: x^2+y^2=9$ $(y \geqq 0)$ 上の 2 点 P, Q は，条件より，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ として，

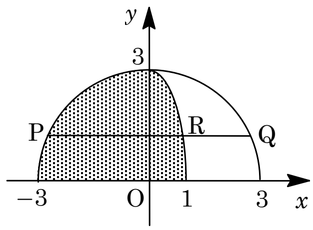
$$\mathrm{P}(-3\cos\theta,\ 3\sin\theta),\ \mathrm{Q}(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$$

さて，線分 PQ を $2:1$ に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{6\cos\theta-3\cos\theta}{3}=\cos\theta,\ y=\frac{6\sin\theta+3\sin\theta}{3}=3\sin\theta$$

これより，点 R の軌跡の方程式は，$0<x\leqq 1$, $0\leqq y<3$ として，

$$x^2+\frac{y^2}{9}=1 \cdots\cdots\cdots ①$$



すると，線分 PR が通過してできる図形 S は右図の網点部となり，その面積は，

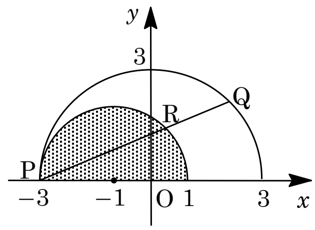
$$\frac{1}{4}\pi\cdot 3^2+\frac{1}{4}\pi\cdot 1\cdot 3=3\pi$$

(2) 条件より，$0\leqq\theta\leqq\pi$ として，$\mathrm{P}(-3,\ 0)$，$\mathrm{Q}(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ とおくと，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は，

$$x=\frac{-3+6\cos\theta}{3}=2\cos\theta-1,\ y=\frac{6\sin\theta}{3}=2\sin\theta$$

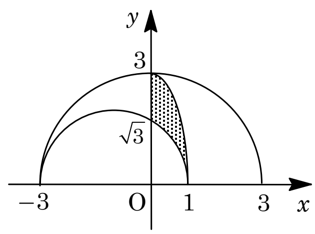
これより，点 R の軌跡の方程式は，$-3\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 2$ として，

$$(x+1)^2+y^2=4 \cdots\cdots\cdots ②$$



すると，線分 PR が通過してできる図形 T は右図の網点部となり，その面積は $\dfrac{1}{2}\pi\cdot 2^2=2\pi$ である。

(3) 図形 S から図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分 U は右図の網点部となり，これを y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。



すると，①から $x^2=1-\dfrac{y^2}{9}$ となり，②から，

$$x+1=\sqrt{4-y^2},\ x=-1+\sqrt{4-y^2}$$

これより，$x^2=\left(-1+\sqrt{4-y^2}\right)^2=5-y^2-2\sqrt{4-y^2}$ となるので，

$$V=\pi\int_0^3\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy-\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(5-y^2-2\sqrt{4-y^2}\right)dy$$

$$=\pi\left[y-\frac{y^3}{27}\right]_0^3-\pi\left[5y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$=(3-1)\pi-(5\sqrt{3}-\sqrt{3})\pi+2\pi\left(\frac{1}{6}\pi\cdot 2^2+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1\right)$$

$$=2\pi-4\sqrt{3}\pi+\frac{4}{3}\pi^2+\sqrt{3}\pi=\left(\frac{4}{3}\pi+2-3\sqrt{3}\right)\pi$$

［解 説］

線分の通過領域と回転体の体積の融合問題です。なお，(1)では楕円の面積公式を利用しています。また，(3)の定積分では図を対応させ，扇形と直角三角形の面積の和として計算しています。

3

問題のページへ

1 から 4 までの 4 枚のカードが入っている箱から 1 枚カードを取り出し，もとに戻す試行を行う。このとき，k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。

さて，$(X_1X_2\cdots X_n)\times X_{n+1}=(X_1X_2\cdots X_nX_{n+1})$ であるが，この式の両辺について 4 で割った余りの関係を調べるために，mod 4 ですべてのパターンを記述すると，右表のようになる。

$0\times1\equiv0$	$0\times2\equiv0$	$0\times3\equiv0$	$0\times4\equiv0$
$1\times1\equiv1$	$1\times2\equiv2$	$1\times3\equiv3$	$1\times4\equiv0$
$2\times1\equiv2$	$2\times2\equiv0$	$2\times3\equiv2$	$2\times4\equiv0$
$3\times1\equiv3$	$3\times2\equiv2$	$3\times3\equiv1$	$3\times4\equiv0$

そこで，この表をもとに $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りの確率について漸化式を作ると，$p_1=q_1=r_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ で，

$$p_{n+1}=p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$n\geqq2$ で $q_n=s_n$ となり，$q_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ から $q_n=s_n\cdots\cdots\cdots⑤$

②⑤から，$q_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n$ となり，

$$q_n=q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},\quad s_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

③に代入すると，$r_{n+1}=\dfrac{1}{2}r_n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ となり，$2^{n+1}r_{n+1}=2^nr_n+\dfrac{1}{2}$ から，

$$2^nr_n=2r_1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n,\quad r_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

さらに，$p_n=1-q_n-r_n-s_n$ から，

$$p_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

［解 説］

確率と漸化式の標準的な問題です。①から④が立式できれば，その処理は難しくありません。なお，p_n は①を解いても求まりますが，(等差)×(等比)という面倒な和が出てきます。

4

問題のページへ

(1)　整数 a は 3 の倍数ではないことより，以下 $\mathrm{mod}\,3$ で記すと，$a\equiv 1$ のとき $a^2\equiv 1$，$a\equiv 2$ のとき $a^2\equiv 4\equiv 1$ となり，いずれも $a^2\equiv 1$ である。また，整数 b も 3 の倍数ではないことより，同様に $b^2\equiv 1$ である。

さて，$f(x)=2x^3+a^2x^2+2b^2x+1$ に対し，

$$f(1)=2+a^2+2b^2+1\equiv 2+1+2\times 1+1=6\equiv 0$$
$$f(2)=16+4a^2+4b^2+1\equiv 1+1\times 1+1\times 1+1=4\equiv 1$$

よって，$f(1)$ を 3 で割った余りは 0，$f(2)$ を 3 で割った余りは 1 である。

(2)　まず，x が 0 以上のとき $f(x)\geqq 1$ となり，$f(x)=0$ を満たさない。

そこで，$f(x)=0$ を満たす整数解 $x=\alpha$ の存在を仮定すると，$\alpha<0$ であり，

$$2\alpha^3+a^2\alpha^2+2b^2\alpha+1=0,\ -\alpha(2\alpha^2+a^2\alpha+2b^2)=1$$

$2\alpha^2+a^2\alpha+2b^2$ は整数なので，$-\alpha$ は 1 の約数であり，$\alpha<0$ から $\alpha=-1$ となり，

$$f(-1)=-2+a^2-2b^2+1=a^2-2b^2-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

ところが，$\mathrm{mod}\,3$ で記すと，$a^2-2b^2-1\equiv 1-2\times 1-1=-2\equiv 1$ となり，①を満たさない。すなわち，$f(x)=0$ を満たす整数 x は存在しない。

(3)　(2)から，$f(x)=0$ を満たす有理数 x は $x<0$ であり，p と q を互いに素な自然数として，$x=-\dfrac{q}{p}$　$(p\geqq 2)$ と表すことができる。すると，$f\left(-\dfrac{q}{p}\right)=0$ から，

$$-\frac{2q^3}{p^3}+\frac{a^2q^2}{p^2}-\frac{2b^2q}{p}+1=0,\ -2q^3+a^2pq^2-2b^2p^2q+p^3=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$p^3=q(2q^2-a^2pq+2b^2p^2)$ となり，p と q は互いに素より $q=1$ であり，

$$p^3=2-a^2p+2b^2p^2,\ a^2p-2b^2p^2+p^3=2\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より，$p(a^2-2b^2p+p^2)=2$ となり，p は 2 以上の自然数から $p=2$ であり，

$$a^2-4b^2+4=1,\ 4b^2-a^2=3,\ (2b+a)(2b-a)=3$$

(i)　$(2b+a,\ 2b-a)=(1,\ 3)$ のとき　$(a,\ b)=(-1,\ 1)$

(ii)　$(2b+a,\ 2b-a)=(3,\ 1)$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 1)$

(iii)　$(2b+a,\ 2b-a)=(-1,\ -3)$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ -1)$

(iv)　$(2b+a,\ 2b-a)=(-3,\ -1)$ のとき　$(a,\ b)=(-1,\ -1)$

(i)～(iv)より，a, b は 3 の倍数ではないことに留意して，

$$(a,\ b)=(-1,\ 1),\ (1,\ 1),\ (1,\ -1),\ (-1,\ -1)$$

［解　説］

3 次方程式の解と整数問題の融合です。最初，(2)は(1)の結果をストレートに利用すると思ったのですが，途中で方向転換をし，定数項の 1 に注目しました。

5

問題のページへ

まず，与えられた等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ に対して，

$$-i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=\alpha(|z|^2+2)\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺に共役複素数をとると，$i(2|\alpha|^2+1)z=\overline{\alpha}(|z|^2+2)\cdots\cdots\cdots②$

①×②より，$(2|\alpha|^2+1)^2z\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}(|z|^2+2)^2$ となり，

$$(2|\alpha|^2+1)^2|z|^2=|\alpha|^2(|z|^2+2)^2,\ (2|\alpha|^2+1)|z|=|\alpha|(|z|^2+2)$$

$|z|$ についてまとめると，$|\alpha||z|^2-(2|\alpha|^2+1)|z|+2|\alpha|=0\cdots\cdots\cdots③$

(i)　$|\alpha|=0\ (\alpha=0)$ のとき　③より $|z|=0$ となり，$z=0$ である。

(ii)　$|\alpha|\neq 0\ (\alpha\neq 0)$ のとき　③より $(|\alpha||z|-1)(|z|-2|\alpha|)=0$ となり，

$$|z|=\frac{1}{|\alpha|},\ |z|=2|\alpha|$$

(ii-i)　$|z|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ のとき　$|z|^2+2=\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2=\dfrac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{\overline{\alpha}}{i(2|\alpha|^2+1)}\cdot\frac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}=\frac{1}{i\alpha}=-\frac{i}{\alpha}$$

(ii-ii)　$|z|=2|\alpha|$ のとき　$|z|^2+2=4|\alpha|^2+2=2(2|\alpha|^2+1)$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}(2|\alpha|^2+1)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}}{i}=-2i\overline{\alpha}$$

［解　説］

複素数の計算についての問題です。題意は，与えられた等式から z を求めるわけですが，上の解答例では，$z\overline{z}=|z|^2$ という関係式を用いて邪魔な $\overline{z}$ を消去するという方針を立て，$|z|$ についての方程式③を導いています。