1

解答解説のページへ

n を自然数とする。$x,\ y$ がすべての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 \left(\sin(2n\pi t) - xt - y\right)^2 dt$$

の最小値を I_n とおく。極限 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7,\quad g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に $a,\ b,\ c$ とする。2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解 z_1，z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ とする。また，複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1)　P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2)　P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3)　P_1 と O を通る直線を l_1 とし，P_2 と O を通る直線を l_2 とする。l_1 と l_2 のなす鋭角が 60° である確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上のあり，A, B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2，P_3，…を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a, b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w=\frac{az+b}{cz+1}$$

で定める点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア)　$z=i$ のときに $w=i$ となり，$z=-i$ のときに $w=-i$ となる。

(イ)　C は単位円の周に含まれる。

(ウ)　点 -1 は C に属さない。

このとき a, b, c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

1

問題のページへ

$P(x,\ y)=\int_0^1\left(\sin(2n\pi t)-xt-y\right)^2dt$ とおくと，

$$P(x,\ y)=\int_0^1\left(\sin^2(2n\pi t)-2(xt+y)\sin(2n\pi t)+(xt+y)^2\right)dt$$

ここで，$\int_0^1\sin^2(2n\pi t)dt=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\cos(4n\pi t)\right)dt=\frac{1}{2}$

$$\int_0^1(xt+y)\sin(2n\pi t)dt=-\left[\frac{xt+y}{2n\pi}\cos(2n\pi t)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x}{2n\pi}\cos(2n\pi t)dt$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\{(x+y)-y\}=-\frac{x}{2n\pi}$$

また，$x\neq 0$ のとき，

$$\int_0^1(xt+y)^2dt=\left[\frac{(xt+y)^3}{3x}\right]_0^1=\frac{1}{3x}\{(x+y)^3-y^3\}=\frac{1}{3}x^2+xy+y^2$$

上式は $x=0$ のときも成り立つので，以上まとめると，

$$P(x,\ y)=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{x}{2n\pi}+\frac{1}{3}x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}+\frac{x}{n\pi}+\frac{1}{3}x^2+\left(y+\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}$$

$$=\frac{x^2}{12}+\frac{x}{n\pi}+\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2+\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}$$

すると，$x=-\frac{6}{n\pi}$，$y=-\frac{x}{2}=\frac{3}{n\pi}$ のとき，$P(x,\ y)$ は最小値 $I_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}$ をとるので，$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{2}$ となる。

［解 説］

定積分の計算問題です。三角関数の周期性に注目することがポイントです。

２　　　　問題のページへ

(1)　0 でない 2 つの整式 $f(x)$ を m 次式，$g(x)$ を n 次式とおき，

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7\cdots\cdots①,\ \ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2\cdots\cdots②$$

まず，①について，左辺の $f(x^2)$ の次数は $2m$，右辺の $(x^2+2)g(x)+7$ の次数は $2+n$ から，$2m=2+n$ すなわち $n=2m-2\cdots\cdots③$となる。

ここで，$n>2$ と仮定すると，③から n は偶数なので，$n\geqq 4$ である。このとき③から，$m\geqq 3$ となる。

また，②について，左辺の $g(x^3)$ の次数は $3n=6m-6$，右辺の $x^4f(x)$ の次数は $4+m\geqq 7$，$-3x^2g(x)$ の次数は $2+n=2m\geqq 6$，$-6x^2-2$ の次数は 2 である。

(i)　$4+m>2m\ (m<4)$ のとき

②の次数を比べると，$6m-6=4+m$ から $m=2$ となり $m\geqq 3$ を満たさない。

(ii)　$4+m=2m\ (m=4)$ のとき

②の左辺の次数は 18，右辺の次数は 8 以下となるので，②は成り立たない。

(iii)　$4+m<2m\ (m>4)$ のとき

②の次数を比べると，$6m-6=2m$ から $2m=3$ となり整数 m は存在しない。

(i)～(iii)より，$n>2$ のときは成立しないので $n\leqq 2$ となり，③から $m\leqq 2$ である。

以上より，$f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下である。

(2)　(1)の結果と③から，$(m,\ n)=(1,\ 0)$，$(2,\ 2)$ である。

(a)　$(m,\ n)=(1,\ 0)$ のとき

②について，左辺は 0 でない定数，右辺は 5 次式になるので，成立しない。

(b)　$(m,\ n)=(2,\ 2)$ のとき

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，$g(x)=px^2+qx+r\ (p\neq 0)$ とおく。

①から，$ax^4+bx^2+c=(x^2+2)(px^2+qx+r)+7$ となり，係数を比べて，

$$a=p,\ 0=q,\ b=2p+r,\ 0=2q,\ c=2r+7$$

すると，$r=b-2p=-2a+b$，$c=2(-2a+b)+7=-4a+2b+7$ となるので，

$$f(x)=ax^2+bx-4a+2b+7,\ g(x)=ax^2-2a+b\quad (a\neq 0)$$

②に代入すると，

$$ax^6-2a+b=x^4(ax^2+bx-4a+2b+7)-3x^2(ax^2-2a+b)-6x^2-2$$
$$ax^6-2a+b=ax^6+bx^5-(7a-2b-7)x^4+3(2a-b-2)x^2-2$$

係数を比べて，$b=0$，$a=1$ となるので，

$$f(x)=x^2+3,\ g(x)=x^2-2$$

［解 説］

整式の決定という問題ですが，まず次数を定めるという処理をするタイプです。

3　問題のページへ

(1)　サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とし，$ax^2+bx+c=0$ ……①を設定し，この解 z_1，z_2 に対して複素数平面上に点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を対応させる。

さて，P_1 と P_2 が一致するのは，①が重解をもつときなので，

$$D=b^2-4ac=0,\ b^2=4ac\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，b^2 は 4 の倍数，すなわち b は偶数になるので，

(i)　$b=2$ のとき　②から $ac=1$ となり，$(a,\ c)=(1,\ 1)$

(ii)　$b=4$ のとき　②から $ac=4$ となり，$(a,\ c)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(4,\ 1)$

(iii)　$b=6$ のとき　②から $ac=9$ となり，$(a,\ c)=(3,\ 3)$

(i)〜(iii)より，P_1 と P_2 が一致する確率は，$\dfrac{1+3+1}{6^3}=\dfrac{5}{216}$ である。

(2)　P_1 と P_2 がともに単位円の周上にあるのは，

(i)　z_1，z_2 が実数のとき

$z_1=\pm1$，$z_2=\pm1$（複号任意）であるが，係数が正の 2 次方程式①の解となるのは $z_1=z_2=-1$ だけなので，(1)の結果から，

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 3)$$

(ii)　z_1，z_2 が虚数のとき

①について $D=b^2-4ac<0$ から，$b^2<4ac$ ………③

このとき，$|z_1|=|z_2|=1$ であるが，$z_2=\overline{z_1}$ なので $|z_1|=1$ となる。

すると，$|z_1|^2=1$ すなわち $z_1\overline{z_1}=1$ から，$z_1z_2=1$ となり，解と係数の関係より，

$$\frac{c}{a}=1,\ a=c$$

(ii-i)　$(a,\ c)=(1,\ 1)$ のとき　③から $b^2<4$ となり，$b=1$

(ii-ii)　$(a,\ c)=(2,\ 2)$ のとき　③から $b^2<16$ となり，$b=1,\ 2,\ 3$

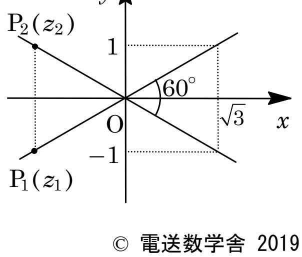
(ii-iii)　$(a,\ c)=(3,\ 3)$ のとき　③から $b^2<36$ となり，$b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

(ii-iv)　$(a,\ c)=(4,\ 4)$，$(5,\ 5)$，$(6,\ 6)$ のとき　③から b は任意となる。

(i)〜(ii)より，P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率は，

$$\frac{3+(1+3+5+6\times3)}{6^3}=\frac{5}{36}$$

(3)　P_1 と O を通る直線 l_1 と，P_2 と O を通る直線 l_2 のなす鋭角が 60° であるのは，z_1，z_2 がともに虚数のときであり，以下，$k<0$ として，複号同順で，



(i)　$(z_1,\ z_2)=\big(k(\sqrt{3}\pm i),\ k(\sqrt{3}\mp i)\big)$ のとき

$z_1+z_2=2k\sqrt{3}$，$z_1z_2=k^2(3+1)=4k^2$ となり，

$$-\frac{b}{a}=2k\sqrt{3}\ \cdots\cdots④,\ \ \frac{c}{a}=4k^2\ \cdots\cdots⑤$$

④より $k=-\dfrac{b}{2\sqrt{3}a}$ となり，⑤に代入すると $\dfrac{c}{a}=4\cdot\dfrac{b^2}{12a^2}$ から，

$$b^2=3ac\cdots\cdots\cdots⑥$$

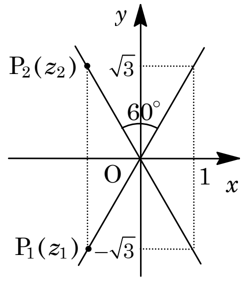
b^2 は 3 の倍数，すなわち b は 3 の倍数になるので，

(i-i) $b=3$ のとき　⑥から $ac=3$ となり，$(a,\ c)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$

(i-ii) $b=6$ のとき　⑥から $ac=12$ となり，

$(a,\ c)=(2,\ 6)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(6,\ 2)$

(ii) $(z_1,\ z_2)=\left(k(1\pm\sqrt{3}i),\ k(1\mp\sqrt{3}i)\right)$ のとき



$z_1+z_2=2k$，$z_1z_2=k^2(1+3)=4k^2$ となり，

$$-\frac{b}{a}=2k\cdots\cdots⑦,\quad \frac{c}{a}=4k^2\cdots\cdots⑧$$

⑦より $k=-\dfrac{b}{2a}$ となり，⑧に代入すると $\dfrac{c}{a}=4\cdot\dfrac{b^2}{4a^2}$ から，

$$b^2=ac\cdots\cdots\cdots⑨$$

b の値で場合分けをして，

(ii-i)　$b=1$ のとき　⑨から $ac=1$ となり，$(a,\ c)=(1,\ 1)$

(ii-ii)　$b=2$ のとき　⑨から $ac=4$ となり，$(a,\ c)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(4,\ 1)$

(ii-iii)　$b=3$ のとき　⑨から $ac=9$ となり，$(a,\ c)=(3,\ 3)$

(ii-iv)　$b=4$ のとき　⑨から $ac=16$ となり，$(a,\ c)=(4,\ 4)$

(ii-v)　$b=5$ のとき　⑨から $ac=25$ となり，$(a,\ c)=(5,\ 5)$

(ii-vi)　$b=6$ のとき　⑨から $ac=36$ となり，$(a,\ c)=(6,\ 6)$

(i)～(ii)より，直線 l_1 と直線 l_2 のなす鋭角が 60° である確率は，

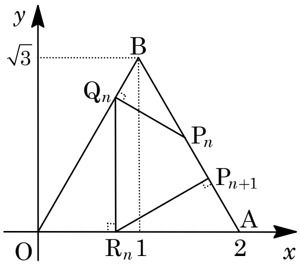
$$\frac{(2+4)+(1+3+1+1+1+1)}{6^3}=\frac{7}{108}$$

［解　説］

複素数平面と確率の融合問題です。ていねいに数え上げるタイプの問題ですが，小問が 3 題もありますので，かなりの量になっています。

4

問題のページへ



3 点 $O(0,\ 0)$，$A(2,\ 0)$，$B(1,\ \sqrt{3})$ に対し，$\triangle OAB$ は 1 辺の長さが 2 の正三角形である。

さて，線分 AB 上の点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} としたとき，$l_n = AP_n$ とおくと，

$$l_{n+1} = AP_{n+1} = AR_n\cos 60^\circ = \frac{1}{2}AR_n = \frac{1}{2}(2 - OR_n) = 1 - \frac{1}{2}OQ_n\cos 60^\circ$$
$$= 1 - \frac{1}{4}OQ_n = 1 - \frac{1}{4}(2 - BQ_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}BQ_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}BP_n\cos 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}BP_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(2 - AP_n) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8}AP_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{8}l_n \cdots\cdots\cdots (*)$$

$(*)$を変形すると，$l_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{8}\left(l_n - \frac{2}{3}\right)$ となり，

$$l_n - \frac{2}{3} = \left(l_1 - \frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1},\quad l_n = \left(l_1 - \frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

ここで，l_1 は $0 < l_1 < 2$ を満たす定数なので，$\lim_{n\to\infty} l_n = \frac{2}{3}$ となる。

すると，P_n が限りなく近づく点は，AB を $\frac{2}{3} : \left(2 - \frac{2}{3}\right) = 1 : 2$ に内分する点であり，その座標は $\left(\frac{5}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ である。

［解　説］

正三角形を題材にした極限についての基本的な問題です。解答例は AP_n についての漸化式を立てましたが，P_n の x 座標についての漸化式を立てても構いません。

5

問題のページへ

$a,\ b$ を複素数，c を純虚数でない複素数とし，点 z が虚軸全体を動くとき，$w=\dfrac{az+b}{cz+1}$ ……①により定まる点 w の軌跡を C とする。

条件(ア)より，$z=i$ のときに $w=i$ から $i=\dfrac{ai+b}{ci+1}$ となり，$-c+i=ai+b$ ………②

また，$z=-i$ のときに $w=-i$ から $-i=\dfrac{-ai+b}{-ci+1}$ となり，$-c-i=-ai+b$ ………③

②＋③より $b=-c$ となり，②－③より $a=1$ となるので，①は，

$$w=\frac{z-c}{cz+1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

次に，条件(イ)から $|w|=1$ なので，④より $\left|\dfrac{z-c}{cz+1}\right|=1$ となり，$\dfrac{|z-c|}{|cz+1|}=1$ から，

$$|z-c|=|cz+1|\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

k を任意の実数として $z=ki$ とおくと，⑤は $|ki-c|=|kci+1|$ となり，

$$(ki-c)(-ki-\bar{c})=(kci+1)(-k\bar{c}i+1)$$

$$k^2-k\bar{c}i+kci+|c|^2=k^2|c|^2+kci-k\bar{c}i+1,\ (|c|^2-1)k^2-(|c|^2-1)=0$$

任意の実数 k で成立することより，$|c|^2-1=0$ となり，$c\bar{c}=1$ ………⑥

また，条件(ウ)は「$w=-1$ となる純虚数 z が存在しない」ということなので，ここで $w=-1$ としたとき，④から $\dfrac{z-c}{cz+1}=-1$，すなわち $z-c=-cz-1$ となり，

$$(c+1)z=c-1\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

(i)　$c=-1$ のとき　⑦は不成立で，$w=-1$ を満たす純虚数 z は存在しない。

(ii)　$c\neq-1$ のとき　⑦から $z=\dfrac{c-1}{c+1}$ となり，⑥より，$\bar{z}=\dfrac{\bar{c}-1}{\bar{c}+1}=\dfrac{\frac{1}{c}-1}{\frac{1}{c}+1}=\dfrac{1-c}{1+c}=-z$

　すると，⑦が成立すなわち $w=-1$ を満たす純虚数 z が存在する。

(i)(ii)より，条件(ウ)を満たす c は，$c=-1$ である。

したがって，$a=1$，$b=1$，$c=-1$ となり，①は $w=\dfrac{z+1}{-z+1}$ である。

このとき，k を任意の実数として $z=ki$ とおくと，

$$w=\frac{ki+1}{-ki+1}=\frac{(1+ki)^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}+\frac{2k}{1+k^2}i$$

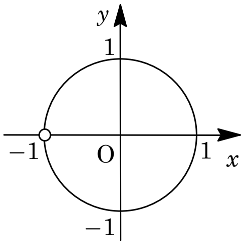
そこで，x, y を実数として，$w=x+yi$ とおくと，

$$x=\frac{1-k^2}{1+k^2}\ \cdots\cdots\cdots⑧,\quad y=\frac{2k}{1+k^2}\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

k は任意の実数なので，$k=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことができ，⑧⑨から，

$$x=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos 2\theta$$

$$y=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sin 2\theta$$



よって，$w=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ となり，点 w の軌跡 C は，原点 O と中心とする半径 1 の円である。ただし，$-\pi<2\theta<\pi$ から点 -1 を除く。そして，C を図示すると，右図のようになる。

［解 説］

複素数平面上の変換についての問題です。条件(ウ)の処理の方法が難です。なお，末尾の $k=\tan\theta$ という置換えは，⑧⑨を見て設定しています。