1

解答解説のページへ

$a \geqq 0$ とする。2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ p)$，C$(q,\ r,\ s)$を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし，$p>0$，$s>0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) p, q, r, s の値を求めよ。

(2) z 軸に垂直な平面で正四面体 OABC を切ったときの断面積の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a, b, c を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a, b を c を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 4 余り，$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るとする。c の絶対値が 40 以下であるとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$C_1: y=x^2$ と $C_2: y=3(x-a)^2+a^3-40$ を連立すると,

$$x^2=3(x-a)^2+a^3-40\,,\ \ 2x^2-6ax+a^3+3a^2-40=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わることより，$D/4=9a^2-2(a^3+3a^2-40)>0$

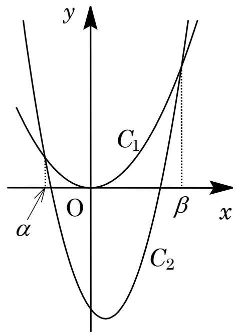
$$2a^3-3a^2-80<0\,,\ (a-4)(2a^2+5a+20)<0$$

$a\geqq 0$ から $2a^2+5a+20>0$ となり，求める a の値の範囲は $0\leqq a<4$ である。

(2)　$0\leqq a<4$ のとき，$(*)$の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{3a-\sqrt{-2a^3+3a^2+80}}{2}$$

$$\beta=\frac{3a+\sqrt{-2a^3+3a^2+80}}{2}$$



すると，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta -(2x^2-6ax+a^3+3a^2-40)dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-2\Big(-\frac{1}{6}\Big)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\big(\sqrt{-2a^3+3a^2+80}\,\big)^3$$

ここで，$f(a)=-2a^3+3a^2+80$ とおくと，

$$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$a=1$のとき最大値 81 をとる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(a)$	0	＋	0	－	
$f(a)$		↗	81	↘	

よって，S の最大値は，$\dfrac{1}{3}\cdot 81^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\cdot 9^3=243$ である。

［解 説］

2 つの放物線の囲まれる図形の面積を問う頻出典型題です。

2　　問題のページへ

(1)　4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ p)$，$\mathrm{C}(q,\ r,\ s)$ に対し，四面体 OABC が正四面体であり，$\mathrm{OA}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ より，

$$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{AC}=\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\mathrm{OB}=\sqrt{1+p^2}$ なので，①より $1+p^2=2$ となり，$p>0$ から $p=1$

このとき，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$ となり，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ を満たしている。

次に，$\mathrm{OC}=\sqrt{q^2+r^2+s^2}$ なので，①より $q^2+r^2+s^2=2\cdots\cdots\cdots②$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(q-1)^2+r^2+(s-1)^2}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{(q-1)^2+(r-1)^2+s^2}$ なので，①より，

$$(q-1)^2+r^2+(s-1)^2=2\cdots\cdots\cdots③,\ (q-1)^2+(r-1)^2+s^2=2\cdots\cdots\cdots④$$

②③より，$-2q+1-2s+1=0$ となり，$q=1-s\cdots\cdots\cdots⑤$

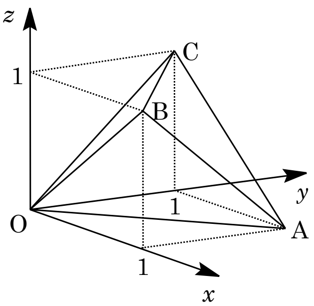
②④より，$-2q+1-2r+1=0$ となり，⑤から $r=1-q=1-(1-s)=s\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥を②に代入して，$(1-s)^2+s^2+s^2=2$ から $3s^2-2s-1=0$ となり，

$$(3s+1)(s-1)=0$$

$s>0$ から $s=1$ となり，⑤⑥から $q=0$，$r=1$ である。

(2)　(1)より $\mathrm{C}(0,\ 1,\ 1)$ となり，正四面体 OABC を平面 $z=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面を考える。

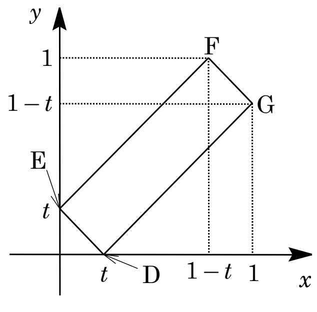


まず，$t=0$ のとき断面は線分 OA，$t=1$ のとき断面は線分 BC となり，ともにその面積は 0 である。

次に，$0<t<1$ のとき，$z=t$ と辺 OB, OC, AC, AB との交点をそれぞれ D, E, F, G とおくと，これらの点はそれぞれの辺を $t:1-t$ に内分する点になるので，

$$\mathrm{D}(t,\ 0,\ t),\ \mathrm{E}(0,\ t,\ t),\ \mathrm{F}(1-t,\ 1,\ t),\ \mathrm{G}(1,\ 1-t,\ t)$$

すると，$z=t$ 上での断面は右図の長方形となり，その面積を $S(t)$ とおくと，



$$S(t)=\sqrt{t^2+t^2}\cdot\sqrt{(1-t)^2+(1-t)^2}=2t(1-t)$$
$$=-2t^2+2t=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

したがって，断面積は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大になり，最大値は $\dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

四面体が題材の空間図形の問題です。(1)はいろいろな方法が考えられますが，最も基本的なもので記しました。

3

問題のページへ

(1)　$a,\ b,\ c$ を整数とする $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，

$f(\alpha)=0$ から，方程式 $f(x)=0$ は α と $\overline{\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ を解にもち，

$$\alpha+\overline{\alpha}=1,\ \alpha\overline{\alpha}=\frac{1+3}{4}=1$$

ここで，解と係数の関係より，α と $\overline{\alpha}$ を解にもつ 2 次方程式として $x^2-x+1=0$ をとり，$f(x)$ を x^2-x+1 で割ると，

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+a+1)+(a+b)x+(-a+c-1)$$

$x=\alpha$ を代入すると，$f(\alpha)=(a+b)\alpha+(-a+c-1)=0$ となり，α は虚数なので，$a+b=0$ かつ $-a+c-1=0$ より，

$$a=c-1,\ b=-a=-c+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$(*)$より，$f(x)=x^3+(c-1)x^2-(c-1)x+c=(x^2-x+1)(x+c)$ となり，

$$f(1)=1+(c-1)-(c-1)+c=c+1$$

$$f(-1)=-1+(c-1)+(c-1)+c=3c-3$$

$f(1)$ を 7 で割ると 4 余るので，p を整数として，$c+1=7p+4\cdots\cdots\cdots$①

$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るので，q を整数として，$3c-3=11q+2\cdots\cdots\cdots$②

すると，①より $c=7p+3$，②より $3c=11q+5$ となり，

$$3(7p+3)=11q+5,\ 21p-11q=-4\cdots\cdots\cdots③$$

④を満たす解の 1 つが $(p,\ q)=(4,\ 8)$ より，$21\cdot4-11\cdot8=-4$ となり，

$$21(p-4)-11(q-8)=0,\ 21(p-4)=11(q-8)$$

ここで，21 と 11 は互いに素より，k を整数として $p-4=11k$ となり，①から，

$$c=7(11k+4)+3=77k+31$$

さらに，$|c|\leqq40$ から $|77k+31|\leqq40$ となり，$k=0$ すなわち $c=31$ である。

このとき，$f(x)=(x^2-x+1)(x+31)$ と表せることから，$f(x)=0$ の解は，$x=-31,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

［解　説］

3 次方程式の解に不定方程式を絡めたタイプです。(1)は(2)との関連も考えて，整式の除法を利用しています。

4　　問題のページへ

(1)　4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目を $a,\ b,\ c,\ d$ とし，$X = abcd$ とおく。

X が $25 = 5^2$ の倍数になるのは，5 の目のサイコロの個数で場合分けをして，

(i)　a, b, c, d のうち 2 個が 5 のとき　その確率は，${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{150}{6^4}$

(ii)　a, b, c, d のうち 3 個が 5 のとき　その確率は，${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{20}{6^4}$

(iii) a, b, c, d のうち 4 個が 5 のとき　その確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{1}{6^4}$

(i)(ii)(iii)より，X が 25 の倍数になる確率は，$\dfrac{150}{6^4} + \dfrac{20}{6^4} + \dfrac{1}{6^4} = \dfrac{171}{6^4} = \dfrac{19}{144}$ となる。

(2)　まず，X が偶数の確率は，$1 - \left(\dfrac{3}{6}\right)^4 = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$ である。

次に，X が 4 の倍数でない偶数の場合は，$a,\ b,\ c,\ d$ のうち 1 個が 2 または 6，残り 3 個が奇数より，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{2^3\cdot 3^3}{6^4} = \frac{1}{6}$$

よって，X が 4 の倍数になる確率は，$\dfrac{15}{16} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{37}{48}$ となる。

(3)　X が $100 = 2^2\cdot 5^2$ の倍数になるのは，5 の目のサイコロの個数で場合分けをして，

(i)　a, b, c, d のうち 2 個が 5 のとき

2 個の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りで，$c = d = 5$ のときは，ab が 4 の倍数となる。

(i-i)　a, b のうち 2 個が 4 のとき　その確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{6^2}$

(i-ii)　a, b のうち 1 個が 4 のとき

a または b の一方だけが 4，もう一方は 1，2，3，6 のいずれかより，その確率は ${}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{4}{6}\right) = \dfrac{8}{6^2}$ である。

(i-iii)　a, b のうち 0 個が 4 のとき

a, b は 2 または 6 のいずれかより，その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{6^2}$ である。

よって，このときの確率は，$6\left(\dfrac{1}{6^2} + \dfrac{8}{6^2} + \dfrac{4}{6^2}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{13}{6^3}$ となる。

(ii)　a, b, c, d のうち 3 個が 5 のとき

残り 1 個は 4 より，その確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{4}{6^4}$

(i)(ii)より，X が 100 の倍数になる確率は，$\dfrac{13}{6^3} + \dfrac{4}{6^4} = \dfrac{82}{6^4} = \dfrac{41}{648}$ となる。

［解 説］

丁寧な場合分けをもとに計算する確率問題です。(2)では余事象の考え方を利用しましたが, (1)や(3)と同じように場合分けで処理しても構いません。