1

解答解説のページへ

点$(a,\ 0)$を通り，曲線$y=e^{-x}-e^{-2x}$に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ d$ を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $c,\ d$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り，11 で割ると 10 余るとする。また，$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り，11 で割ると 10 余るとする。a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

四面体 OABC において, 辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を l, 辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m, 辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。$l \perp m$, $m \perp n$, $n \perp l$ であり, $\mathrm{AB}=\sqrt{5}$, $\mathrm{BC}=\sqrt{3}$, $\mathrm{CA}=2$ のとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OB と直線 CA のなす角 $\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2) 四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

4

解答解説のページへ

4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標空間において，中心$(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。D を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱（内部を含む）を E とする。点$(0,\ 2,\ 2)$と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$-1 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また，T の体積を求めよ。

(2)　T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

1　　問題のページへ

まず，曲線 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ に対して，$y'=-e^{-x}+2e^{-2x}$ となり，点 $(t,\ e^{-t}-e^{-2t})$ における接線の方程式は，

$$y-(e^{-t}-e^{-2t})=(-e^{-t}+2e^{-2t})(x-t)\cdots\cdots\cdots①$$

①が点 $(a,\ 0)$ を通ることより，$-(e^{-t}-e^{-2t})=(-e^{-t}+2e^{-2t})(a-t)$

$$(e^{-t}-2e^{-2t})a=t(e^{-t}-2e^{-2t})+(e^{-t}-e^{-2t})\cdots\cdots\cdots②$$

$e^{-t}-2e^{-2t}=0$ のとき，②は $0=e^{-2t}$ となり成立しないので $e^{-t}-2e^{-2t}\neq 0$ であり，

$$a=\frac{t(e^{-t}-2e^{-2t})+(e^{-t}-e^{-2t})}{e^{-t}-2e^{-2t}}=\frac{t(e^{t}-2)+(e^{t}-1)}{e^{t}-2}\cdots\cdots\cdots③$$

さて，③が実数解をもつ条件は，$f(t)=\dfrac{t(e^{t}-2)+(e^{t}-1)}{e^{t}-2}$ とおくとき，$y=a$ と $y=f(t)$ のグラフが共有点をもつ条件に対応する。

そこで，$f(t)$ を変形して，$f(t)=\dfrac{t(e^{t}-2)+(e^{t}-2)+1}{e^{t}-2}=t+1+\dfrac{1}{e^{t}-2}$ として，

$$f'(t)=1-\frac{e^{t}}{(e^{t}-2)^2}=\frac{e^{2t}-5e^{t}+4}{(e^{t}-2)^2}=\frac{(e^{t}-1)(e^{t}-4)}{(e^{t}-2)^2}$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，

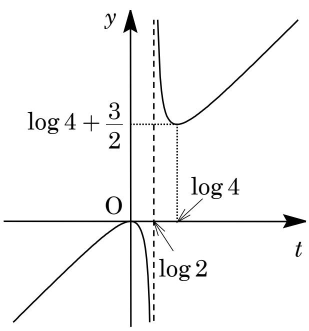
$$f(\log 4)=\log 4+\frac{3}{2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	$\log 4$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

また，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\left(t+1+\frac{1}{e^{t}-2}\right)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}\left(t+1+\frac{1}{e^{t}-2}\right)=-\infty$

$$\lim_{t\to\log 2+0}f(t)=\lim_{t\to\log 2+0}\left(t+1+\frac{1}{e^{t}-2}\right)=\infty$$

$$\lim_{t\to\log 2-0}f(t)=\lim_{t\to\log 2-0}\left(t+1+\frac{1}{e^{t}-2}\right)=-\infty$$



すると，$y=f(t)$ のグラフは右図のようになり，③すなわち $a=f(t)$ が実数解をもつ a の値の範囲，言い換えると点 $(a,\ 0)$ を通り曲線 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ に接する直線が存在する a の値の範囲は，$a\leqq 0$，$\log 4+\dfrac{3}{2}\leqq a$ となる。

［解　説］

微分法の方程式への応用問題で，解法の流れは明快です。ただ，$f'(t)$ の計算量を軽減するために，$f(t)$ を変形するという工夫をしていますが。

2

問題のページへ

(1)　$a,\ b,\ c,\ d$ を整数とする $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，$f(\alpha)=0$ から，方程式 $f(x)=0$ は α と $\overline{\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ を解にもち，

$$\alpha+\overline{\alpha}=1,\ \alpha\overline{\alpha}=\frac{1+3}{4}=1$$

ここで，解と係数の関係より，α と $\overline{\alpha}$ を解にもつ 2 次方程式として $x^2-x+1=0$ をとり，$f(x)$ を x^2-x+1 で割ると，

$$f(x)=(x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+(a+b)\}+(b+c-1)x+(-a-b+d)$$

$x=\alpha$ を代入すると，$f(\alpha)=(b+c-1)\alpha+(-a-b+d)=0$ となり，α は虚数なので，$b+c-1=0$ かつ $-a-b+d=0$ より，

$$c=-b+1,\ d=a+b\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$(*)$より，$f(x)=x^4+ax^3+bx^2-(b-1)x+(a+b)$ となり，

$$f(1)=1+a+b-(b-1)+(a+b)=2a+b+2$$

$$f(-1)=1-a+b+(b-1)+(a+b)=3b$$

$f(1)$ を 7 で割ると 1 余り，11 で割ると 10 余るので，p,q を整数として，

$$2a+b+2=7p+1\cdots\cdots\cdots①,\ 2a+b+2=11q+10\cdots\cdots\cdots②$$

$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り，11 で割ると 10 余るので，r,s を整数として，

$$3b=7r+3\cdots\cdots\cdots③,\ 3b=11s+10\cdots\cdots\cdots④$$

すると，③④より，$7r+3=11s+10$ となり，$7(r-1)=11s$

ここで，7 と 11 は互いに素より，k を整数として $s=7k$ となり，④から，

$$3b=11\cdot7k+10=77k+10\cdots\cdots\cdots⑤$$

さらに，$|b|\leqq40$ から $|3b|\leqq120$ となり，$|77k+10|\leqq120$ から，$k=-1,\ 0,\ 1$

(i)　$k=-1$ のとき　⑤より $3b=-67$ となり b は整数でない。

(ii)　$k=0$ のとき　⑤より $3b=10$ となり b は整数でない。

(iii)　$k=1$ のとき　⑤より $3b=87$ となり $b=29$ である。

(i)(ii)(iii)より，$b=29$ となり，①②に代入すると，

$$2a+31=7p+1\cdots\cdots\cdots⑥,\ 2a+31=11q+10\cdots\cdots\cdots⑦$$

すると，⑥⑦より，$7p+1=11q+10$ となり，$7p-11q=9\cdots\cdots\cdots⑨$

⑨を満たす解の 1 つが $(p,\ q)=(6,\ 3)$ より，$7\cdot6-11\cdot3=9$ となり，

$$7(p-6)-11(q-3)=0,\ 7(p-6)=11(q-3)$$

ここで，7 と 11 は互いに素より，l を整数として $p-6=11l$ となり，⑥から，

$$2a=7(11l+6)+1-31=77l+12\cdots\cdots\cdots⑩$$

さらに，$|a|\leqq40$ から $|2a|\leqq80$ となり，$|77l+12|\leqq80$ から，$l=-1,\ 0$

(iv)　$l=-1$ のとき　⑩より $2a=-65$ となり a は整数でない。

(v)　$l=0$ のとき　⑤より $2a=12$ となり $a=6$ である。

(iv)(v)より，$a=6$ となり，$b=29$ と合わせて，

$$f(x)=(x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+(a+b)\}=(x^2-x+1)(x^2+7x+35)$$

よって，$f(x)=0$ の解は，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$，$\dfrac{-7\pm\sqrt{91}i}{2}$ である。

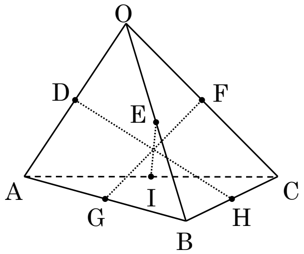
［解　説］

4 次方程式の解を題材とした不定方程式の問題です。(2)では，まず①～④を解いて a, b の一般解を求めた後，絶対値が 40 以下として絞り込むこともできますが，かなりの時間を費やしてしまいます。

3

問題のページへ

(1) 四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおき，辺 OA, OB, OC, AB, BC, CA の中点を，それぞれ D, E, F, G, H, I とすると，



$$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$$

そして，$\overrightarrow{DH}$，$\overrightarrow{EI}$，$\overrightarrow{FG}$ は，それぞれ直線 l, m, n の方向ベクトルである。

さて，$l\perp m$ より $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{EI}=0$ なので，$(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=0$ から，

$$|\vec{c}|^2-|-\vec{a}+\vec{b}|^2=0\,,\ |\vec{c}|=|-\vec{a}+\vec{b}|$$

よって，$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{AB}|$ より，$OC=AB=\sqrt{5}$ ………①

同様に，$m\perp n$ より $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FG}=0$，$n\perp l$ より $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{DH}=0$ なので，

$$(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=0\,,\ (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

よって，$OA=BC=\sqrt{3}$ ……②，$OB=CA=2$ ……③となる。

そこで，△OAB と△OBC に余弦定理を適用すると，

$$5=3+4-2\vec{a}\cdot\vec{b}\,,\ 3=4+5-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

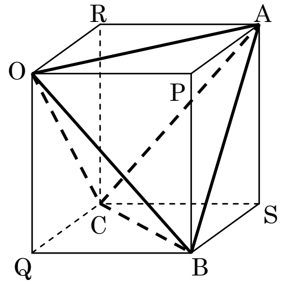
これより，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ となり，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=1-3=-2$

そして，直線 OB と直線 CA のなす角を $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{CA}|}=\frac{|-2|}{2\cdot2}=\frac{1}{2}$$

よって，$\theta=\frac{\pi}{3}$ となる。

(2) ①②③より，四面体 OABC は 4 つの面が合同な三角形であるので，右図のように直方体 OPAR-QBSC に埋め込むことができる。



ここで，$OP=p$，$OQ=q$，$OR=r$ とおくと，

$$p^2+q^2=OB^2=4\ \cdots\cdots\cdots④$$

$$q^2+r^2=OC^2=5\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$r^2+p^2=OA^2=3\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より $q^2-p^2=2$ となり，④と合わせて $p^2=1$，$q^2=3$，$r^2=2$

すると，四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の中心を K とすると，K は直方体 OPAR-QBSC の中心に一致するので，球の半径 KO は，

$$\mathrm{KO}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+3+2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

［解 説］

四面体を題材にした空間図形の問題です。ただ，(1)のプロセスから，この四面体が等面四面体であることがわかりますので，その知識を利用して(2)は解いています。

4

問題のページへ

(1)　4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目を a，b，c，d とし，$X=abcd$ とおく。

X が $25=5^2$ の倍数になるのは，5 の目のサイコロの個数で場合分けをして，

(i)　a, b, c, d のうち 2 個が 5 のとき　その確率は，${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{150}{6^4}$

(ii)　a, b, c, d のうち 3 個が 5 のとき　その確率は，${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)=\dfrac{20}{6^4}$

(iii)　a, b, c, d のうち 4 個が 5 のとき　その確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^4=\dfrac{1}{6^4}$

(i)(ii)(iii)より，X が 25 の倍数になる確率は，$\dfrac{150}{6^4}+\dfrac{20}{6^4}+\dfrac{1}{6^4}=\dfrac{171}{6^4}=\dfrac{19}{144}$ となる。

(2)　まず，X が偶数の確率は，$1-\left(\dfrac{3}{6}\right)^4=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$ である。

次に，X が 4 の倍数でない偶数の場合は，a, b, c, d のうち 1 個が 2 または 6，残り 3 個が奇数より，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{2^3\cdot 3^3}{6^4}=\frac{1}{6}$$

よって，X が 4 の倍数になる確率は，$\dfrac{15}{16}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{37}{48}$ となる。

(3)　X が $100=2^2\cdot 5^2$ の倍数になるのは，5 の目のサイコロの個数で場合分けをして，

(i)　a, b, c, d のうち 2 個が 5 のとき

2 個の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りで，$c=d=5$ のときは，ab が 4 の倍数となる。

(i-i)　a, b のうち 2 個が 4 のとき　その確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{6^2}$

(i-ii)　a, b のうち 1 個が 4 のとき

a または b の一方だけが 4，もう一方は 1，2，3，6 のいずれかより，その確率は ${}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{4}{6}\right)=\dfrac{8}{6^2}$ である。

(i-iii)　a, b のうち 0 個が 4 のとき

a, b は 2 または 6 のいずれかより，その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^2=\dfrac{4}{6^2}$ である。

よって，このときの確率は，$6\left(\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{8}{6^2}+\dfrac{4}{6^2}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{13}{6^3}$ となる。

(ii)　a, b, c, d のうち 3 個が 5 のとき

残り 1 個は 4 より，その確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{4}{6^4}$

(i)(ii)より，X が 100 の倍数になる確率は，$\dfrac{13}{6^3}+\dfrac{4}{6^4}=\dfrac{82}{6^4}=\dfrac{41}{648}$ となる。

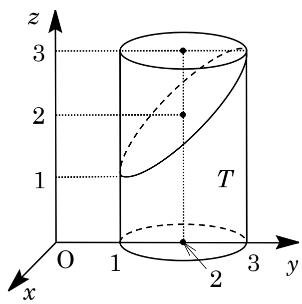
［解 説］

丁寧な場合分けをもとに計算する確率問題です。(2)では余事象の考え方を利用しましたが，(1)や(3)と同じように場合分けで処理しても構いません。

5

問題のページへ

(1) xy 平面内にある中心 $(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 の円を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱（内部を含む）を E とする。このとき，点 $(0,\ 2,\ 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，下側の部分を T とする。



このとき，T を表す連立不等式は，

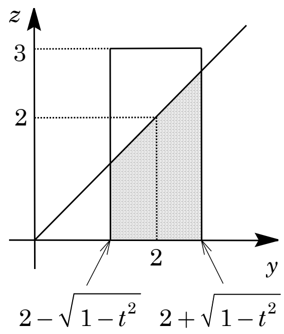
$x^2+(y-2)^2 \leqq 1$ ………①，$0 \leqq z \leqq 3$ ………②

$z \leqq y$ ………③

さて，平面 $x=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で T を切ったとき，①より，

$$t^2+(y-2)^2 \leqq 1,\ (y-2)^2 \leqq 1-t^2,\ 2-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 2+\sqrt{1-t^2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

そして，②③④から，断面を $x=t$ 上に図示すると，右図の網点部となり，この面積 $S(t)$ は，



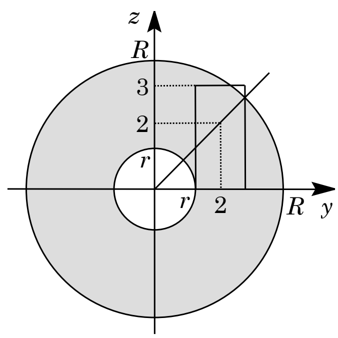
$$S(t)=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{1-t^2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{1-t^2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{1-t^2}\cdot 2=4\sqrt{1-t^2}$$

また，T の体積 V は，

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)dt=4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$
$$=8\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=8\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi$$

(2) 平面 $x=t$ 上で，T の断面を x 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R，内径を r とおくと，

$$R=\sqrt{2}\left(2+\sqrt{1-t^2}\right),\ r=2-\sqrt{1-t^2}$$



このドーナツ形の面積 $U(t)$ は，

$$U(t)=\pi(R^2-r^2)$$
$$=\pi\left\{4+12\sqrt{1-t^2}+(1-t^2)\right\}$$
$$=\pi\left(5-t^2+12\sqrt{1-t^2}\right)$$

すると，T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 W は，

$$W=\int_{-1}^{1}U(t)dt=\pi\int_{-1}^{1}\left(5-t^2+12\sqrt{1-t^2}\right)dt$$
$$=2\pi\int_{0}^{1}\left(5-t^2+12\sqrt{1-t^2}\right)dt=2\pi\left(5-\frac{1}{3}\right)+24\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi(14+9\pi)$$

［解　説］

立体の体積についての標準的な問題です。計算も複雑ではありません。