1　解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　4 次方程式 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を解け。

(2)　複素数平面上の△ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とする。

$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$ が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。

2

解答解説のページへ

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha,\ \ a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha \leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(2)　$\alpha > 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(3)　$1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(4)　$\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

点Oを原点とする座標平面上の$\vec{0}$でない2つのベクトル$\overrightarrow{m}=(a,\ c)$，$\vec{n}=(b,\ d)$に対して，$D=ad-bc$とおく。座標平面上のベクトル$\vec{q}$に対して，次の条件を考える。

条件Ⅰ　$r\overrightarrow{m}+s\vec{n}=\vec{q}$を満たす実数$r, s$が存在する。

条件Ⅱ　$r\overrightarrow{m}+s\vec{n}=\vec{q}$を満たす整数$r, s$が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1)　条件Ⅰがすべての$\vec{q}$に対して成り立つとする。$D\neq 0$であることを示せ。

以下，$D\neq 0$であるとする。

(2)　座標平面上のベクトル$\vec{v}$，$\vec{w}$で，$\overrightarrow{m}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot\vec{w}=1$，$\overrightarrow{m}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$を満たすものを求めよ。

(3)　さらに$a,\ b,\ c,\ d$が整数であるとし，x成分とy成分がともに整数であるすべてのベクトル$\vec{q}$に対して条件Ⅱが成り立つとする。Dのとりうる値をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A)　すべての x, y について $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$

(B)　すべての x, y について $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

(C)　$f(0)\neq 0$

(D)　$f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$，$g'(0)=1$

①条件(A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ がわかる。以上のことから，②$f(x)$，$g(x)$ はすべての x で微分可能で，$f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ が成立することが示される。③上のことから $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ であることが，実部と虚部を調べることよりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件(A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ であることが示される。

さらに，a, b を実数で $b\neq 0$ とする。このとき条件(D) より一般的な

(D)$'$　$f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$，$g'(0)=b$

におきかえて，条件(A)，(B)，(C)，(D)$'$ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件(A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right),\ q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④条件(A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x)=\boxed{\text{ア}}$，$g(x)=\boxed{\text{イ}}$ が得られる。

(1)　下線部①について，$f(0)=1$，$g(0)=0$ となることを示せ。

(2)　下線部②について，$f(x)$ がすべての x で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。

(3)　下線部③について，下線部①，下線部②の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ となることを示せ。

(4)　下線部④について，条件(B)，(D)において，$f(x)$を$p(x)$に，$g(x)$を$q(x)$におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり$p(x)$と$q(x)$が,

(B)　すべてのx, yについて$q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$

(D)　$p(x)$，$q(x)$は$x=0$で微分可能で$p'(0)=0$，$q'(0)=1$

を満たすことを示せ。また空欄$\boxed{\quad ア \quad}$, $\boxed{\quad イ \quad}$に入る関数を求めよ。

5

解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = t + 2\sin^2 t,\quad y = t + \sin t\quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。

(2)　曲線 C のうち $y \leqq x$ の領域にある部分と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

1　問題のページへ

(1)　方程式$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$……①について，$x\neq 0$から，

$$x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

これより，$\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2=0$となり，$x+\frac{1}{x}-1=0$から$x^2-x+1=0$

よって，①の解は$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$である。

(2)　$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$……②に対して，$z=\alpha-\beta$，$w=\gamma-\beta$とおくと，$w-z=\gamma-\alpha$となるので，②は$z^4+(-w)^4+(w-z)^4=0$から，

$$z^4+w^4+w^4-4w^3z+6w^2z^2-4wz^3+z^4=0$$

$$w^4-2w^3z+3w^2z^2-2wz^3+z^4=0$$

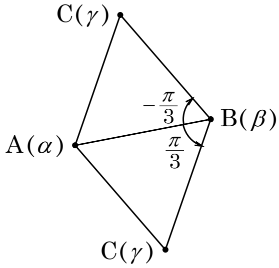
$z=\alpha-\beta\neq 0$なので，$\left(\frac{w}{z}\right)^4-2\left(\frac{w}{z}\right)^3+3\left(\frac{w}{z}\right)^2-2\left(\frac{w}{z}\right)+1=0$

さらに，$x=\frac{w}{z}$とおくと，$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$となり，①に一致する。

(1)から，$\frac{w}{z}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$となり，

$$\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\ \text{（複号同順）}$$

したがって，点$\mathrm{C}(\gamma)$は，点$\mathrm{A}(\alpha)$を点$\mathrm{B}(\beta)$のまわりに$\pm\frac{\pi}{3}$だけ回転した点なので，これより$\triangle\mathrm{ABC}$は正三角形である。

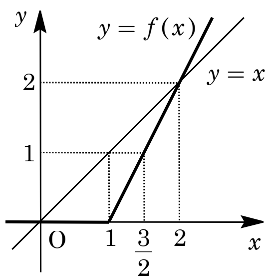


［解　説］

複素数平面上の図形についての問題です。予想通り，(1)の設問は(2)の誘導になっていました。

2

問題のページへ



$a_1=\alpha$，$a_{n+1}=|a_n-1|+a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列$\{a_n\}$に対して，

$a_n \geqq 1$ のとき，$a_{n+1}=(a_n-1)+a_n-1=2a_n-2$

$a_n<1$ のとき，$a_{n+1}=-(a_n-1)+a_n-1=0$

ここで，$f(x)=|x-1|+x-1$ とおくと，$a_{n+1}=f(a_n)$ となり，このとき右図を参考に数列$\{a_n\}$の収束，発散を調べる。

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，$a_2=f(a_1)=f(\alpha)=0$ となり，帰納的に $a_n=0$ $(n \geqq 2)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

(2) $\alpha>2$ のとき，$a_2=f(a_1)=f(\alpha)=2\alpha-2>2$ となり，帰納的に $a_n>2$ なので，

$$a_{n+1}=2a_n-2$$

$a_{n+1}-2=2(a_n-2)$ と変形すると，$a_n-2=(a_1-2)\cdot 2^{n-1}=(\alpha-2)\cdot 2^{n-1}$

よって，$a_n=(\alpha-2)\cdot 2^{n-1}+2$ となり，$\alpha-2>0$ から $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ である。

(3) $1<\alpha<\frac{3}{2}$ のとき，$a_2=f(a_1)=f(\alpha)=2\alpha-2$ から，$0<a_2<1$ である。

これより，$a_3=f(a_2)=0$ となり，帰納的に $a_n=0$ $(n \geqq 3)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

(4) $\frac{3}{2} \leqq \alpha<2$ のとき，どんな n に対しても $a_n \geqq 1$ と仮定すると $a_{n+1}=2a_n-2$ から，

$$a_n=(\alpha-2)\cdot 2^{n-1}+2 \geqq 1$$

このとき，$1 \geqq (2-\alpha)\cdot 2^{n-1}$ となり，$0<2-\alpha \leqq \frac{1}{2}$ から，

$$2^{n-1} \leqq \frac{1}{2-\alpha} \cdots\cdots\cdots(*)$$

ところが，どんな n に対しても$(*)$が成り立つことはない。

したがって，ある n に対して $a_n<1$ となり，その n の最小値を $n=n_0$ とおくと，$a_{n_0}<1$ である。

すると，$a_{n_0+1}=f(a_{n_0})=0$ となり，帰納的に $a_n=0$ $(n \geqq n_0+1)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

［解　説］

漸化式で与えられた数列の極限の問題です。解答例の冒頭の図をもとに極限を調べています。(4)は，n がある程度大きくなれば，そのうち $a_n<1$ となる a_n が現れてくることを示しています。

3

問題のページへ

(1)　$\vec{0}$でないベクトル$\vec{m}=(a,\ c)$，$\vec{n}=(b,\ d)$について，どんな$\vec{q}=(p,\ q)$に対してもr$\vec{m}$+s$\vec{n}=\vec{q}$を満たす実数r, sが存在するとき，

$$ra+sb=p\cdots\cdots\cdots①,\ rc+sd=q\cdots\cdots\cdots②$$

①×d－②×b より，$(ad-bc)r=dp-bq\cdots\cdots\cdots③$

②×a－①×c より，$(ad-bc)s=aq-cp\cdots\cdots\cdots④$

すると，どんな実数 $p,\ q$ に対しても，③④が成立する実数 $r,\ s$ が存在するのは，$(a,\ c)\neq(0,\ 0)$かつ$(b,\ d)\neq(0,\ 0)$より，

$$D=ad-bc\neq 0$$

(2)　条件より，$D\neq 0$のもとで，$\vec{m}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot\vec{w}=1\cdots\cdots⑤$，$\vec{m}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0\cdots\cdots⑥$

まず，⑥から，k, lを実数として，$\vec{v}=k(d,\ -b)$，$\vec{w}=l(c,\ -a)$と表せる。

次に，⑤から，$k(ad-bc)=l(bc-ad)=1$となるので，

$$k=\frac{1}{ad-bc},\ l=-\frac{1}{ad-bc}$$

よって，$\vec{v}=\dfrac{1}{ad-bc}(d,\ -b)$，$\vec{w}=-\dfrac{1}{ad-bc}(c,\ -a)$である。

(3)　$D\neq 0$のもとで，③④から，

$$r=\frac{dp-bq}{ad-bc}=\frac{d}{ad-bc}p-\frac{b}{ad-bc}q=\frac{d}{D}p-\frac{b}{D}q\cdots\cdots\cdots⑦$$

$$s=\frac{aq-cp}{ad-bc}=\frac{a}{ad-bc}q-\frac{c}{ad-bc}p=\frac{a}{D}q-\frac{c}{D}p\cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$a,\ b,\ c,\ d$が整数のとき，どんな整数$p,\ q$に対しても，⑦⑧を満たす$r,\ s$が整数である必要十分条件を求める。

まず，$(p,\ q)=(1,\ 0)$に対して$r=\dfrac{d}{D}$，$s=-\dfrac{c}{D}$が整数，そして$(p,\ q)=(0,\ 1)$に対して$r=-\dfrac{b}{D}$，$s=\dfrac{a}{D}$が整数であるので，まとめると$\dfrac{a}{D}$，$\dfrac{b}{D}$，$\dfrac{c}{D}$，$\dfrac{d}{D}$が整数であることが必要である。

逆に，$\dfrac{a}{D}$，$\dfrac{b}{D}$，$\dfrac{c}{D}$，$\dfrac{d}{D}$が整数であるとき，⑦⑧より，どんな整数 $p,\ q$ に対してもr, sは整数となる。

以上より，求める必要十分条件は，$\dfrac{a}{D}$，$\dfrac{b}{D}$，$\dfrac{c}{D}$，$\dfrac{d}{D}$が整数である。

このとき，$\dfrac{a}{D}\cdot\dfrac{d}{D}-\dfrac{b}{D}\cdot\dfrac{c}{D}=\dfrac{D}{D^2}=\dfrac{1}{D}$が整数になることより，$D$は 1 の約数，すなわち$D=\pm 1$である。

逆に，$D=\pm 1$のとき$\dfrac{a}{D}$，$\dfrac{b}{D}$，$\dfrac{c}{D}$，$\dfrac{d}{D}$はすべて整数なので，Dのとりうる値は，

$$D=\pm 1$$

［解 説］

平面ベクトルの 1 次結合についての問題です。(2)は，たとえば $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ の場合，$\vec{x}=\vec{0}$ または $\vec{y}=\vec{0}$ または $\vec{x}\perp\vec{y}$ ということに着目しています。また，(3)は，必要条件を求め，そのあと十分性を確認するというスタイルで，丁寧に記しました。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$x=y=0$ を条件(A)，(B)に代入すると，

$$f(0)=\{f(0)\}^2-\{g(0)\}^2\cdots\cdots①,\ \ g(0)=2f(0)g(0)\cdots\cdots②$$

②より，$g(0)\{2f(0)-1\}=0$ となるので，

(i)　$g(0)=0$ のとき

①に代入すると $f(0)=\{f(0)\}^2$ となり，条件(C)から $f(0)=1$ である。

(ii)　$g(0)\neq 0$ のとき

②から $f(0)=\dfrac{1}{2}$ となり，①に代入すると $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}-\{g(0)\}^2$ から成立しない。

(i)(ii)より，$f(0)=1$，$g(0)=0$ である。

(2)　条件(A)と $f(0)=1$，$g(0)=0$ を用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-1}{h}-g(x)\cdot\frac{g(h)}{h}\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}-g(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\right\}\end{aligned}$$

条件(D)より，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=0$，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)=1$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)f'(0)-g(x)g'(0)=-g(x)$ となり，$f(x)$ はすべての x で微分可能で，$f'(x)=-g(x)$ である。

(3)　$h(x)=\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ とおき，$h(x)$ の実部を $R(x)$，虚部を $I(x)$ とすると，$h(x)=R(x)+iI(x)$ となり，

$$R(x)=f(x)\cos x+g(x)\sin x,\ \ I(x)=-f(x)\sin x+g(x)\cos x$$

すると，$f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ から，

$$\begin{aligned}R'(x)&=f'(x)\cos x-f(x)\sin x+g'(x)\sin x+g(x)\cos x\\&=-g(x)\cos x-f(x)\sin x+f(x)\sin x+g(x)\cos x=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I'(x)&=-f'(x)\sin x-f(x)\cos x+g'(x)\cos x-g(x)\sin x\\&=g(x)\sin x-f(x)\cos x+f(x)\cos x-g(x)\sin x=0\end{aligned}$$

これより，C_1，C_2 を定数として，$R(x)=C_1$，$I(x)=C_2$ である。

そこで，$f(0)=1$，$g(0)=0$ より，

$$R(0)=f(0)\cos 0+g(0)\sin 0=1,\ \ I(0)=-f(0)\sin 0+g(0)\cos 0=0$$

よって，$C_1=1$，$C_2=0$ から，$R(x)=1$，$I(x)=0$ となるので，

$$h(x)=\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$$

(4)　$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right)$，$q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)$ のとき，

$$q(x+y)=e^{-\frac{a}{b}(x+y)}g\left(\frac{x+y}{b}\right)=e^{-\frac{a}{b}x}e^{-\frac{a}{b}y}\left\{f\left(\frac{x}{b}\right)g\left(\frac{y}{b}\right)+g\left(\frac{x}{b}\right)f\left(\frac{y}{b}\right)\right\}$$
$$=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right)\cdot e^{-\frac{a}{b}y}g\left(\frac{y}{b}\right)+e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)\cdot e^{-\frac{a}{b}y}f\left(\frac{y}{b}\right)$$
$$=p(x)q(y)+q(x)p(y)$$

また，$p(0)=e^0f(0)=1$となり，$h'=\dfrac{h}{b}$とおくと，$h\to0$のとき$h'\to0$なので，

$$\lim_{h\to0}\frac{p(h)-p(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{-\frac{a}{b}h}f\left(\frac{h}{b}\right)-1}{h}=\lim_{h'\to0}\frac{e^{-ah'}f(h')-1}{bh'}$$
$$=\frac{1}{b}\lim_{h'\to0}\frac{e^{-ah'}f(h')-f(h')+f(h')-1}{h'}$$
$$=\frac{1}{b}\lim_{h'\to0}\left\{\frac{e^{-ah'}-1}{h'}\cdot f(h')+\frac{f(h')-f(0)}{h'}\right\}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h'\to0}\frac{e^{-ah'}-1}{h'}=\lim_{h'\to0}\frac{e^{-ah'}-e^0}{h'}=-a$，$f'(0)=a$なので，

$$\lim_{h\to0}\frac{p(h)-p(0)}{h}=\frac{1}{b}\{(-a)f(0)+f'(0)\}=\frac{1}{b}(-a\cdot1+a)=0$$

よって，$p(x)$は$x=0$で微分可能で，$p'(0)=0$である。

次に，$q(0)=e^0g(0)=0$となり，$g'(0)=b$から，

$$\lim_{h\to0}\frac{q(h)-q(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{-\frac{a}{b}h}g\left(\frac{h}{b}\right)}{h}=\lim_{h'\to0}\frac{e^{-ah'}g(h')}{bh'}$$
$$=\frac{1}{b}\lim_{h'\to0}\frac{e^{-ah'}g(h')-g(h')+g(h')}{h'}$$
$$=\frac{1}{b}\lim_{h'\to0}\left\{\frac{e^{-ah'}-1}{h'}\cdot g(h')+\frac{g(h')-g(0)}{h'}\right\}$$
$$=\frac{1}{b}\{(-a)g(0)+g'(0)\}=\frac{1}{b}(-a\cdot0+b)=1$$

よって，$q(x)$は$x=0$で微分可能で，$q'(0)=1$である。

すると，前半の議論により，$p(x)=\cos x$，$q(x)=\sin x$となり，

$$e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right)=\cos x,\quad e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)=\sin x$$

これから，$f\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\cos x$，$g\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\sin x$なので，

$$f(x)=e^{ax}\cos bx,\quad g(x)=e^{ax}\sin bx$$

［解 説］

共通テストの影響が強く感じられる微分係数や導関数の定義についての問題です。ただ，証明せずに結論が与えられている箇所もあり，はしごを外されたような感じがするのもしばしばです。共通テストでは頻繁にあることですが……。

5

問題のページへ

(1) 曲線 $C: x=t+2\sin^2 t=t+1-\cos 2t$，$y=t+\sin t\ (0<t<\pi)$ に対して，

$$\frac{dx}{dt}=1+2\sin 2t,\ \frac{dy}{dt}=1+\cos t$$

$0<t<\pi$ において，$\dfrac{dx}{dt}=0$ となるのは，$2\sin 2t=-1$ から，$2t=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi\ \left(t=\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi\right)$ であり，また $\dfrac{dy}{dt}>0$ である。

これより，$0<t<\pi$ における $x,\ y$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{7}{12}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{12}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	π
$\frac{dy}{dt}$		$+$		$+$		$+$	0
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	π

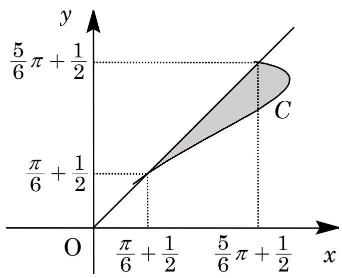
さて，y 軸と平行な C の接線が存在するのは，$\dfrac{dx}{dt}=0$ から $t=\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi$ のときである。$t=\dfrac{7}{12}\pi$，$t=\dfrac{11}{12}\pi$ のとき接線の方程式は，それぞれ $x=\dfrac{7}{12}\pi+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{11}{12}\pi+1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるので，y 軸と平行な C の接線は 2 本存在する。

(2) 曲線 C のうち $y\leqq x$ の領域にある部分は，

$$t+\sin t\leqq t+2\sin^2 t$$

$0<t<\pi$ より $\sin t>0$ なので，$2\sin t\geqq 1$ となり，

$$\frac{\pi}{6}\leqq t\leqq\frac{5}{6}\pi$$



$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき点 $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\right)$，$t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき点 $\left(\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{1}{2}\right)$ が対応し，曲線 C のうち $y\leqq x$ の領域にある部分と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}}x\,dy-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(t+1-\cos 2t)(1+\cos t)\,dt-\frac{\pi}{3}(\pi+1)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left\{t+1-\cos 2t+t\cos t+\cos t-\frac{1}{2}(\cos 3t+\cos t)\right\}dt-\frac{\pi}{3}(\pi+1)$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{6}\sin 3t+\frac{1}{2}\sin t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}t\cos t\,dt-\frac{\pi}{3}(\pi+1)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\pi^2+\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}t\cos t\,dt-\frac{\pi}{3}(\pi+1)$$

そして，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} t\cos t\,dt = \Big[\,t\sin t\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \sin t\,dt = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ から，

$$S = \left(\frac{1}{3}\pi^2 + \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{3}(\pi + 1) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解　説］

パラメータ曲線と面積についての問題です。標準的な内容ですが，計算量はかなり多めです。