1

解答解説のページへ

2 つの放物線 $C_1: y=2x^2$，$C_2: y=2x^2-8x+16$ の両方に接する直線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面上の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ を考える。点 B は第 1 象限にあり，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{10}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を求めよ。

(2) $s,\ t$ を正の実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす点 C を考える。三角形 OAC と三角形 OBC の面積が等しく，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 4$ が成り立つとき，s, t の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2)　$2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3)　$a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち, x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

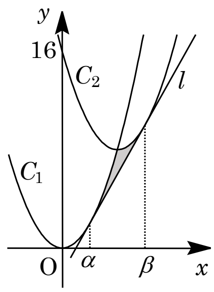
(1)　$L(3)$ を求めよ。

(2)　$L(4)$ を求めよ。

(3)　$L(5)$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1 : y = 2x^2$ ……①，$C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16$ ……②に対し，C_1 上の点$(\alpha,\ 2\alpha^2)$における接線の方程式は，①から $y' = 4x$ より，

$$y - 2\alpha^2 = 4\alpha(x - \alpha),\quad y = 4\alpha x - 2\alpha^2 \text{………③}$$

また，C_2 上の点$(\beta,\ 2\beta^2 - 8\beta + 16)$における接線の方程式は，②から $y' = 4x - 8$ より，

$$y - (2\beta^2 - 8\beta + 16) = (4\beta - 8)(x - \beta)$$

$$y = (4\beta - 8)x - 2\beta^2 + 16 \text{………④}$$

③と④が一致することより，$4\alpha = 4\beta - 8$ ……⑤，$-2\alpha^2 = -2\beta^2 + 16$ ……⑥

⑤から $\beta = \alpha + 2$ を⑥に代入すると，$\alpha^2 = (\alpha + 2)^2 - 8$ から $4\alpha - 4 = 0$ となり，

$$\alpha = 1,\quad \beta = 3$$

すると，直線 l の方程式は，③から $y = 4x - 2$ である。

(2)　C_1 と C_2 の交点は，①②より $2x^2 = 2x^2 - 8x + 16$ となり，$x = 2$ である。

すると，C_1，C_2 と l で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_1^2 \{2x^2 - (4x - 2)\}dx + \int_2^3 \{2x^2 - 8x + 16 - (4x - 2)\}dx$$

$$= 2\int_1^2 (x-1)^2 dx + 2\int_2^3 (x-3)^2 dx = 2\Big[\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_1^2 + 2\Big[\frac{1}{3}(x-3)^3\Big]_2^3$$

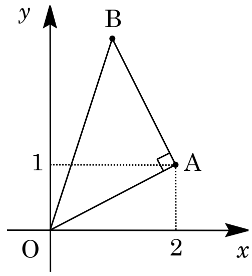
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

［解　説］

微積分の超頻出題です。なお，(1)は重解条件を用いる方法もあります。

2

問題のページへ



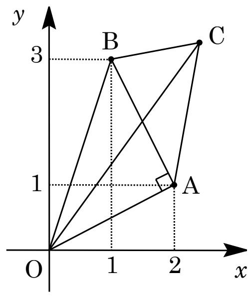
(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \sqrt{10}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{10-5} = \sqrt{5}$$

点 B は第 1 象限にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,\ 1)$ を原点まわりに 90° だけ回転したものとなり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 2)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 1) + (-1,\ 2) = (1,\ 3)$$

したがって，B$(1,\ 3)$ である。



(2)　条件より，$s>0$，$t>0$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

まず，$\triangle\mathrm{OAC} = \triangle\mathrm{OBC}$ から，直線 OC は線分 AB の中点を通ることより，$s=t$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\cdot1 + 1\cdot3 = 5$ より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = s\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = s\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}$$
$$= s\sqrt{5 + 2\cdot5 + 10} = 5s$$

すると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 4$ から $5s = 4$ となり，$s = t = \dfrac{4}{5}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの基本題です。計算量を減らす方向で，図形的に記述しています。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1)　自然数 a, b が $1 \leqq a < b$ をみたすとき，

(i)　$b = a+1\ (a = b-1)$ のとき　$a! = (b-1)!$ から，$\dfrac{b!}{a!} = \dfrac{b!}{(b-1)!} = b$

(ii)　$b > a+1\ (a < b-1)$ のとき　$a! < (b-1)!$ から，$\dfrac{b!}{a!} > \dfrac{b!}{(b-1)!} = b$

(i)(ii)より，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ ……①が成り立つ。

(2)　自然数 a, b が $2\cdot a! = b!$ ……②をみたすとき，$a! < b!$ から $a < b$ である。

すると，①から $2 = \dfrac{b!}{a!} \geqq b$ となり，$1 \leqq a < b$ から，$a = 1$，$b = 2$ である。

このとき，$2\cdot 1! = 2!$ が成り立ち，②をみたす自然数 $(a,\ b)$ は，

$(a,\ b) = (1,\ 2)$

(3)　自然数 a, b, c が $a! + b! = 2\cdot c!$ ……③をみたすとき，

(i)　$a = b$ のとき　③より $a! + a! = 2\cdot c!$ となり，$a! = c!$ から $a = c$

したがって，k を自然数として，$(a,\ b,\ c) = (k,\ k,\ k)$ である。

(ii)　$a < b$ のとき　$a! < b!$ となり，$2\cdot a! < a! + b! < 2\cdot b!$

③から $2\cdot a! < 2\cdot c! < 2\cdot b!$ となり，$a! < c! < b!$ から $1 \leqq a < c < b$ である。

さて，③より $2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!}$ となり，①から $\dfrac{b!}{c!} \geqq b$ なので，

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geqq \frac{a!}{c!} + b > b$$

すると，$b < 2$ となるが，これは $1 \leqq a < c < b$ をみたさない。

(iii)　$a > b$ のとき　(ii)と同様にすると，$1 \leqq b < c < a$，$2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!}$ である。

このとき，①から $\dfrac{a!}{c!} \geqq a$ なので，$2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!} \geqq a + \dfrac{b!}{c!} > a$

すると，$a < 2$ となるが，これは $1 \leqq b < c < a$ をみたさない。

(i)～(iii)より，③をみたす自然数 $(a,\ b,\ c)$ は，

$(a,\ b,\ c) = (k,\ k,\ k)$ (k は自然数)

［解　説］

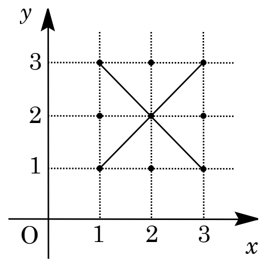
誘導つきの整数問題です。不等式①の使い方がポイントです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

座標平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数である n^2 個の格子点について，3 点以上の格子点を通る直線の個数を $L(n)$ とする。

(1)　$n=3$ のとき，9 個の格子点は右図の通りであり，3 点以上の格子点を通る直線は，



・x 軸に平行な直線　$y=1,\ 2,\ 3$ で 3 本

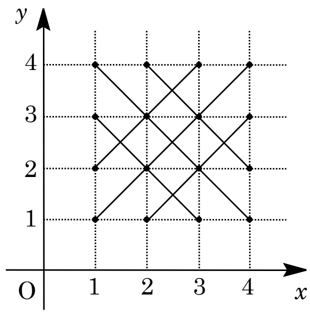
・y 軸に平行な直線　$x=1,\ 2,\ 3$ で 3 本

・傾き正の直線　右図のように，傾き 1 が 1 本

・傾き負の直線　右図のように，傾き -1 が 1 本

以上より，$L(3)=3+3+1+1=8$

(2)　$n=4$ のとき，16 個の格子点は右図の通りであり，3 点以上の格子点を通る直線は，



・x 軸に平行な直線　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4$ で 4 本

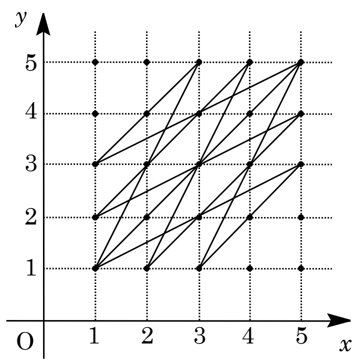
・y 軸に平行な直線　$x=1,\ 2,\ 3,\ 4$ で 4 本

・傾き正の直線　右図のように，傾き 1 が 3 本

・傾き負の直線　右図のように，傾き -1 が 3 本

以上より，$L(4)=4+4+3+3=14$

(3)　$n=5$ のとき，25 個の格子点は右図の通りであり，3 点以上の格子点を通る直線は，



・x 軸に平行な直線　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ で 5 本

・y 軸に平行な直線　$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ で 5 本

・傾き正の直線　右図において，

傾き $1,\ 2,\ \dfrac{1}{2}$ が，それぞれ 5 本，3 本，3 本

傾き $3,\ 4,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4}$ は，いずれも 0 本

・傾き負の直線　傾き正の直線と同様に考えて，

傾き $-1,\ -2,\ -\dfrac{1}{2}$ が，それぞれ 5 本，3 本，3 本で，それ以外はない。

以上より，$L(5)=5+5+(5+3+3)+(5+3+3)=32$

［解　説］

具体的なケースについて，場合の数を数える問題です。ただ，どこまで記述すればよいのか迷いますが。