1

解答解説のページへ

a を実数とし，座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $a \neq -1$，$a \neq 1$ のとき，3 点 P, Q, R は一直線上にないことを示せ。

(2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

整式 $f(z)=z^6+z^4+z^2+1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して，$|z|=1$ が成り立つことを示せ。

(2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。

条件：$f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して $f(wz)=0$ が成り立つ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2)　$2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3)　$a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち, x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$L(3)$ を求めよ。

(2)　$L(4)$ を求めよ。

(3)　$L(5)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

自然数 $m,\ n$ に対して，$I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x (\log x)^n\,dx$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $I(m+1,\ n+1)$ を $I(m,\ n+1)$，$I(m,\ n)$，m，n を用いて表せ。

(2) すべての自然数 m に対して，$\lim_{n\to\infty} I(m,\ n)=0$ が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ

(1)　3 点 $P(-1,\ 1,\ -1)$，$Q(1,\ 1,\ 1)$，$R(a,\ a^2,\ a^3)$ に対し，$\overrightarrow{PQ}=2(1,\ 0,\ 1)$

$$\overrightarrow{PR}=(a+1,\ a^2-1,\ a^3+1)=(a+1)(1,\ a-1,\ a^2-a+1)$$

ここで，3 点 P, Q, R は一直線上にあると仮定すると，k を実数として，

$$\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ},\ (a+1)(1,\ a-1,\ a^2-a+1)=2k(1,\ 0,\ 1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$(*)$の y 成分を比べると，$a\neq-1$，$a\neq 1$ から $\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$ は成立しない。

よって，3 点 P, Q, R は一直線上にない。

(2)　$|\overrightarrow{PQ}|=2\sqrt{1+1}=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{PR}|=(a+1)\sqrt{1+(a-1)^2+(a^2-a+1)^2}$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=2(a+1)(1+a^2-a+1)=2(a+1)(a^2-a+2)$$

さて，△PQR の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}$ より，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{8(a+1)^2\{1+(a-1)^2+(a^2-a+1)^2\}-4(a+1)^2(a^2-a+2)^2}$$
$$=\sqrt{(a+1)^2\{2+2(a-1)^2+2(a^2-a+1)^2-(a^2-a+2)^2\}}$$
$$=\sqrt{(a+1)^2(a^4-2a^3+3a^2-4a+2)}=\sqrt{(a+1)^2(a-1)^2(a^2+2)}$$
$$=\sqrt{(a^2-1)^2(a^2+2)}$$

ここで，$t=a^2-1$ とおくと，$-1<a<1$ から $-1\leqq t<0$ となり，

$$S=\sqrt{t^2(t+3)}=\sqrt{t^3+3t^2}$$

さらに，$f(t)=t^3+3t^2$ とおくと，$f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

すると，$-1\leqq t<0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)$ の最大値は $f(-1)=2$ である。

t	-1	$\cdots$	0
$f'(t)$		$-$	0
$f(t)$	2	↘	0

よって，$S=\sqrt{f(t)}$ から，S は $t=-1\ (a=0)$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

［解　説］

空間ベクトルの応用についての頻出題です。解答例では公式処理をしましたが，やや計算が煩雑でした。

2

問題のページへ

(1)　$f(z)=z^6+z^4+z^2+1$ に対して，$f(z)=0$ とすると，

$$z^4(z^2+1)+z^2+1=0,\ (z^2+1)(z^4+1)=0$$

・$z^2+1=0$ に対して，$z^2=-1$ から $z=\pm i$ となり，

$$z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\ z=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$$

・$z^4+1=0$ に対して，$z^4+2z^2+1-2z^2=0$ と変形すると，

$$(z^2+1)^2-(\sqrt{2}z)^2=0,\ (z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1)=0$$

これより，$z=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$，$z=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ となり，

$$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\ z=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$$

$$z=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi,\ z=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi$$

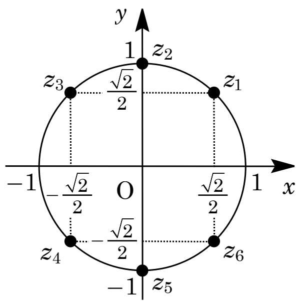
以上より，$f(z)=0$ のすべての解 z について，$|z|=1$ が成り立つ。

(2)　$f(z)=0$ をみたすすべての z に対し，$f(wz)=0$ が成り立つとき，(1)より，

$$|z|=1,\ |wz|=1$$

すると，$|w||z|=1$ から $|w|=1$ となり，$w=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，複素数平面上で，点 wz は点 z を原点まわりに θ だけ回転した点である。

さて，$f(z)=0$ の解を，右図のように，$z=z_1$，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6 とおくと，点 wz と点 z が一致する条件は，z_1 に着目すると，



・$wz_1=z_1$ のとき　$\theta=0$ から wz と z は一致する。

・$wz_1=z_2$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となり $f(wz_3)\neq 0$ である。

・$wz_1=z_3$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となり $f(wz_2)\neq 0$ である。

・$wz_1=z_4$ のとき　$\theta=\pi$ から原点対称移動となり，wz と z は一致する。

・$wz_1=z_5$ のとき　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ となり $f(wz_3)\neq 0$ である。

・$wz_1=z_6$ のとき　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ となり $f(wz_2)\neq 0$ である。

したがって，点 wz と点 z が一致する条件は，$\theta=0$ または $\theta=\pi$ となり，

$$w=\cos 0+i\sin 0=1,\ w=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

［解　説］

高次方程式の解と複素数平面についての問題です。(1)は複 2 次方程式を解きましたが，他の解法もあります。また，(2)は場合分けを行い，丁寧に記しました。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1)　自然数 $a,\, b$ が $1 \leqq a < b$ をみたすとき，

(i)　$b = a+1\ (a = b-1)$ のとき　$a! = (b-1)!$ から，$\dfrac{b!}{a!} = \dfrac{b!}{(b-1)!} = b$

(ii)　$b > a+1\ (a < b-1)$ のとき　$a! < (b-1)!$ から，$\dfrac{b!}{a!} > \dfrac{b!}{(b-1)!} = b$

(i)(ii)より，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ ……①が成り立つ。

(2)　自然数 $a,\, b$ が $2\cdot a! = b!$ ……②をみたすとき，$a! < b!$ から $a < b$ である。

すると，①から $2 = \dfrac{b!}{a!} \geqq b$ となり，$1 \leqq a < b$ から，$a = 1$，$b = 2$ である。

このとき，$2\cdot 1! = 2!$ が成り立ち，②をみたす自然数 $(a,\ b)$ は，

$(a,\ b) = (1,\ 2)$

(3)　自然数 $a,\, b,\, c$ が $a! + b! = 2\cdot c!$ ……③をみたすとき，

(i)　$a = b$ のとき　③より $a! + a! = 2\cdot c!$ となり，$a! = c!$ から $a = c$

したがって，k を自然数として，$(a,\ b,\ c) = (k,\ k,\ k)$ である。

(ii)　$a < b$ のとき　$a! < b!$ となり，$2\cdot a! < a! + b! < 2\cdot b!$

③から $2\cdot a! < 2\cdot c! < 2\cdot b!$ となり，$a! < c! < b!$ から $1 \leqq a < c < b$ である。

さて，③より $2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!}$ となり，①から $\dfrac{b!}{c!} \geqq b$ なので，

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geqq \frac{a!}{c!} + b > b$$

すると，$b < 2$ となるが，これは $1 \leqq a < c < b$ をみたさない。

(iii)　$a > b$ のとき　(ii)と同様にすると，$1 \leqq b < c < a$，$2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!}$ である。

このとき，①から $\dfrac{a!}{c!} \geqq a$ なので，$2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!} \geqq a + \dfrac{b!}{c!} > a$

すると，$a < 2$ となるが，これは $1 \leqq b < c < a$ をみたさない。

(i)〜(iii)より，③をみたす自然数 $(a,\ b,\ c)$ は，

$(a,\ b,\ c) = (k,\ k,\ k)$ (k は自然数)

［解　説］

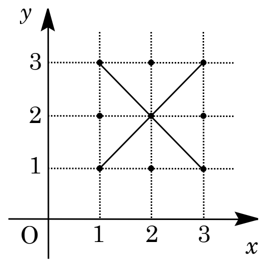
誘導つきの整数問題です。不等式①の使い方がポイントです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

座標平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数である n^2 個の格子点について，3 点以上の格子点を通る直線の個数を $L(n)$ とする。

(1)　$n=3$ のとき，9 個の格子点は右図の通りであり，3 点以上の格子点を通る直線は，



・x 軸に平行な直線　$y=1$，2，3 で 3 本

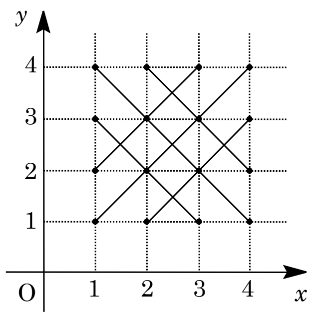
・y 軸に平行な直線　$x=1$，2，3 で 3 本

・傾き正の直線　右図のように，傾き 1 が 1 本

・傾き負の直線　右図のように，傾き -1 が 1 本

以上より，$L(3)=3+3+1+1=8$

(2)　$n=4$ のとき，16 個の格子点は右図の通りであり，3 点以上の格子点を通る直線は，



・x 軸に平行な直線　$y=1$，2，3，4 で 4 本

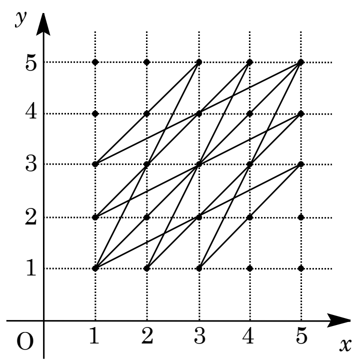
・y 軸に平行な直線　$x=1$，2，3，4 で 4 本

・傾き正の直線　右図のように，傾き 1 が 3 本

・傾き負の直線　右図のように，傾き -1 が 3 本

以上より，$L(4)=4+4+3+3=14$

(3)　$n=5$ のとき，25 個の格子点は右図の通りであり，3 点以上の格子点を通る直線は，



・x 軸に平行な直線　$y=1$，2，3，4，5 で 5 本

・y 軸に平行な直線　$x=1$，2，3，4，5 で 5 本

・傾き正の直線　右図において，

傾き 1，2，$\dfrac{1}{2}$ が，それぞれ 5 本，3 本，3 本

傾き 3，4，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$ は，いずれも 0 本

・傾き負の直線　傾き正の直線と同様に考えて，

傾き -1，-2，$-\dfrac{1}{2}$ が，それぞれ 5 本，3 本，3 本で，それ以外はない。

以上より，$L(5)=5+5+(5+3+3)+(5+3+3)=32$

［解　説］

具体的なケースについて，場合の数を数える問題です。ただ，どこまで記述すればよいのか迷いますが。

5

問題のページへ

(1) m, n が自然数のとき，$I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x(\log x)^n dx$ に対して，

$$I(m+1,\ n+1)=\int_1^e x^{m+1}e^x(\log x)^{n+1}dx$$

ここで，$\left(x^{m+1}(\log x)^{n+1}\right)'=(m+1)x^m(\log x)^{n+1}+x^{m+1}(n+1)(\log x)^n\cdot x^{-1}$ から，

$$\begin{aligned}I(m+1,\ n+1)&=\left[x^{m+1}e^x(\log x)^{n+1}\right]_1^e-(m+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^{n+1}dx\\&\quad-(n+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^n dx\\&=e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)-(n+1)I(m,\ n)\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

(2) ①を変形すると，

$$I(m,\ n)=\frac{1}{n+1}\{e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)-I(m+1,\ n+1)\}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$1\leqq x\leqq e$ において，$x^m e^x(\log x)^n\geqq 0$ なので，

$$I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x(\log x)^n dx\geqq 0$$

同様に，$I(m,\ n+1)\geqq 0$，$I(m+1,\ n+1)\geqq 0$ となり，②から，

$$0\leqq I(m,\ n)\leqq\frac{1}{n+1}e^{m+e+1}$$

すると，すべての自然数 m に対して，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}e^{m+e+1}=0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}I(m,\ n)=0$$

［解 説］

(1)の部分積分は，問題文を参考にして，e^x を積分する方，$x^{m+1}(\log x)^{n+1}$ を微分する方に役割を分担しました。(2)は，①の $I(m,\ n)$ の係数 $n+1$ に注目しています。