

1[解答例のページへ](#)

2 つの曲線 $y = x^3 + x^2 - x - 1$, $y = x^2$ の両方に接するすべての直線の方程式を求めよ。

2

[解答例のページへ](#)

半径 1 の円周 C 上の 2 点 A, B は $AB = \sqrt{3}$ をみたすとする。点 P が円周 C 上を動くとき、 $AP^2 + BP^2$ の最大値を求めよ。

3[解答例のページへ](#)

以下の問いに答えよ。

- (1) n を整数とすると、 n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。
- (2) $2^m = n^2 + 3$ をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) をすべて求めよ。

4[解答例のページへ](#)

1 個のさいころを 3 回続けて投げ、出る目を順に a, b, c とする。整式 $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が 1 個である確率を求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ をみたす自然数 x の個数が 3 個である確率を求めよ。

1

曲線 $y = x^3 + x^2 - x - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して,

$$y = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)^2(x-1)$$

ここで、曲線①と曲線 $y = x^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$ の両方に接する直線について、曲線①上の接点を $(t, t^3 + t^2 - t - 1)$ とおくと、接線の方程式は、 $y' = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$ から、

$$y - (t^3 + t^2 - t - 1) = (3t^2 + 2t - 1)(x - t)$$

$$y = (3t^2 + 2t - 1)x - 2t^3 - t^2 - 1$$

$$= (t+1)(3t-1)x - (t+1)(2t^2 - t + 1) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②と③を連立し、 $x^2 - (t+1)(3t-1)x + (t+1)(2t^2 - t + 1) = 0$ が重解をもつので、

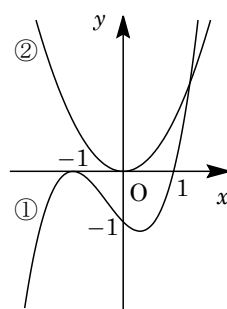
$$D = (t+1)^2(3t-1)^2 - 4(t+1)(2t^2 - t + 1) = 0$$

まとめると、 $(t+1)(9t^3 - 5t^2 - t - 3) = 0$ から $(t+1)(t-1)(9t^2 + 4t + 3) = 0$

$9t^2 + 4t + 3 = 0$ は実数解をもたないので、 $t = -1$ または $t = 1$ である。

すると、曲線①と②の両方に接する直線は、③から $y = 0$ または $y = 4x - 4$ である。

問題のページへ



[コメント]

2 曲線の共通接線についての基本題です。曲線の概形を調べると、 $y = 0$ がその 1 つであることがわかります。

2

$C: x^2 + y^2 = 1$ 上の 2 点 A, B が, $AB = \sqrt{3}$ をみたすとき,
 C 上の動点 P を $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと,
 $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ としても一般性を失わない。

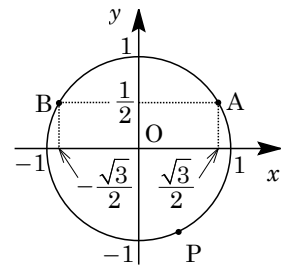
$$AP^2 = \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$BP^2 = \left(\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right)^2$$

これより, $AP^2 + BP^2 = 2\cos^2 \theta + \frac{3}{2} + 2\sin^2 \theta - 2\sin \theta + \frac{1}{2} = 4 - 2\sin \theta$ となる。

したがって, $AP^2 + BP^2$ は $\sin \theta = -1$ ($\theta = \frac{3}{2}\pi$) のとき最大値 $4 + 2 = 6$ をとる。

問題のページへ

**[コメント]**

円を題材にした基本題です。計算が容易になるような設定が重要です。

3

問題のページへ

(1) 整数 n を 4 で割った余りで分類すると, k を整数として,

(i) $n = 4k$ のとき $n^2 = 16k^2 = 8 \cdot 2k^2$

(ii) $n = 4k + 1$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + k) + 1$

(iii) $n = 4k + 2$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + 2k) + 4$

(iv) $n = 4k + 3$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1$

(i)~(iv)より, n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかである。

(2) 0 以上の整数 m, n に対して, $2^m = n^2 + 3 \cdots \cdots (*)$

まず, $(*)$ の右辺の $n^2 + 3$ を 8 で割った余りは, (1) から 3, 4, 7 のいずれかである。

また, $(*)$ の左辺の 2^m を 8 で割った余りは, $m = 0$ のとき 1, $m = 1$ のとき 2, $m = 2$ のとき 4, $m \geq 3$ のとき 0 である。

ここで, $(*)$ が成り立つには, 2^m を 8 で割った余りと $n^2 + 3$ を 8 で割った余りが等しいことが必要である。すると, $n^2 + 3$ と 2^m を 8 で割った余りがともに 4 のときになり, $m = 2$ かつ $2^2 = n^2 + 3$ のときである。

したがって, $(*)$ をみたす (m, n) は, $(m, n) = (2, 1)$ である。

[コメント]

余りで分類するタイプの整数問題です。(1)が(2)にストレートにつながります。

4

問題のページへ

さいころを 3 回投げて出る目が順に a, b, c のとき、 $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ に対して、 $f(x) = 0$ を満たす x について、

(1) $f(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が 1 個であるのは、その実数は $x = c$ であり、

(i) $x^2 - ax + b = 0$ が虚数解をもつとき

$D = a^2 - 4b < 0$ から $a^2 < 4b \leq 24$ となり、 $1 \leq a \leq 4$ である。

・ $a = 1$ のとき $4b > 1$ から、 $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

・ $a = 2$ のとき $b > 1$ から、 $b = 2, 3, 4, 5, 6$

・ $a = 3$ のとき $4b > 9$ から、 $b = 3, 4, 5, 6$

・ $a = 4$ のとき $b > 4$ から、 $b = 5, 6$

c は 6 通りずつより、 (a, b, c) は $(6 + 5 + 4 + 2) \times 6 = 102$ 通りの場合がある。

(ii) $x^2 - ax + b = 0$ が重解 $x = c$ をもつとき

$D = a^2 - 4b = 0$ から $a^2 = 4b$ ($a = 2\sqrt{b}$) となり、 $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ である。

・ $(a, b) = (2, 1)$ のとき $x^2 - 2x + 1 = 0$ より重解は $x = 1$ となり、 $c = 1$

・ $(a, b) = (4, 4)$ のとき $x^2 - 4x + 4 = 0$ より重解は $x = 2$ となり、 $c = 2$

これより、 (a, b, c) は 2 通りの場合がある。

(i)(ii) より、求める確率は $\frac{102+2}{6^3} = \frac{13}{27}$ である。

(2) $f(x) = 0$ をみたす自然数 x の個数が 3 個であるのは、 $x^2 - ax + b = 0$ の異なる自然数解について、 l を自然数として $D = a^2 - 4b = l^2$ ($a^2 = 4b + l^2$) が必要である。

このとき、解は $x = \frac{a \pm l}{2}$ となり、 $l^2 \leq 36 - 4 = 32$ から $1 \leq l \leq 5$ であるので、

・ $l = 1$ のとき $a^2 = 4b + 1$ から、 $(a, b) = (3, 2), (5, 6)$

$(a, b) = (3, 2)$ のとき $x = \frac{3 \pm 1}{2}$ から、 c は $c \neq 1, 2$ の 4 通りで、 $(a, b) = (5, 6)$

のとき $x = \frac{5 \pm 1}{2}$ から、 c は $c \neq 2, 3$ の 4 通りとなる。

・ $l = 2$ のとき $a^2 = 4b + 4 = 4(b + 1)$ から、 $(a, b) = (4, 3)$

このとき $x = \frac{4 \pm 2}{2}$ となり、 c は $c \neq 1, 3$ の 4 通りとなる。

・ $l = 3$ のとき $a^2 = 4b + 9$ から、 $(a, b) = (5, 4)$

このとき $x = \frac{5 \pm 3}{2}$ となり、 c は $c \neq 1, 4$ の 4 通りとなる。

・ $l = 4$ のとき $a^2 = 4b + 16 = 4(b + 4)$ から、 $(a, b) = (6, 5)$

このとき $x = \frac{6 \pm 4}{2}$ となり、 c は $c \neq 1, 5$ の 4 通りとなる。

・ $l = 5$ のとき $a^2 = 4b + 25$ から、みたす (a, b) は存在しない

以上より，求める確率は $\frac{4 \times 5}{6^3} = \frac{5}{54}$ である。

[コメント]

丁寧に数え上げるタイプの確率問題です。何よりも注意力が要求されます。なお，(2)では， $x^2 - ax + b = 0$ に解と係数の関係を適用して，自然数解の値からアプローチする方法もあります。