

1

[解答例のページへ](#)

座標空間内の 3 点 $A(1, 1, -5)$, $B(-1, -1, 7)$, $C(1, -1, 3)$ を通る平面を α とする。点 $P(a, b, t)$ を通り α に垂直な直線と xy 平面との交点を Q とする。

- (1) 点 Q の座標を求めよ。
- (2) t がすべての実数値をとって変化するときの OQ の最小値が 1 以下となるような a, b の条件を求めよ。ただし, O は原点である。

2

[解答例のページへ](#)

以下の問いに答えよ。

(1) $y = \tan x$ とするとき, $\frac{dy}{dx}$ を y の整式で表せ。

(2) 次の定積分を求めよ。 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx$

3[解答例のページへ](#)

以下の問いに答えよ。

- (1) n を整数とすると、 n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。
- (2) $2^m = n^2 + 3$ をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) をすべて求めよ。

4[解答例のページへ](#)

半径 1 の円周上に反時計回りに点 A, B, C, D を順にとり、線分 AD は直径で、 $AC = CD$ 、 $AB = BC$ が成り立つとする。

- (1) $\angle ACB$ を求めよ。
- (2) BC を求めよ。
- (3) 線分 AC と線分 BD の交点を E とするとき、三角形 BCE の面積を求めよ。

5[解答例のページへ](#)

1 個のさいころを 3 回続けて投げ、出る目を順に a, b, c とする。整式 $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が 1 個である確率を求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ をみたす自然数 x の個数が 3 個である確率を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 3 点 $A(1, 1, -5)$, $B(-1, -1, 7)$, $C(1, -1, 3)$ を通る平面 α に対し、点 $P(a, b, t)$ を通り α に垂直な直線と xy 平面との交点を $Q(x, y, 0)$ とすると、

$$\overrightarrow{CA} = (0, 2, -8) = 2(0, 1, -4)$$

$$\overrightarrow{CB} = (-2, 0, 4) = 2(-1, 0, 2)$$

このとき、 $\overrightarrow{PQ} = (x-a, y-b, -t)$ から、

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

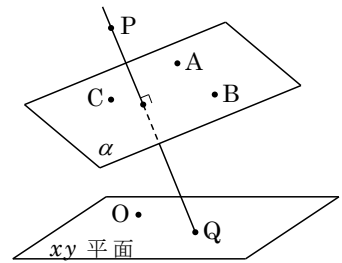
すると、 $(y-b) + 4t = 0$, $-(x-a) - 2t = 0$ となり、 $x = a - 2t$, $y = b - 4t$ から、点 Q の座標は $Q(a - 2t, b - 4t, 0)$ である。

- (2) $OQ^2 = (a - 2t)^2 + (b - 4t)^2 = 20t^2 - 4(a + 2b)t + a^2 + b^2$ となり、

$$OQ^2 = 20\left(t - \frac{a + 2b}{10}\right)^2 + \frac{4a^2 - 4ab + b^2}{5} = 20\left(t - \frac{a + 2b}{10}\right)^2 + \frac{(2a - b)^2}{5}$$

これより、 OQ の最小値は $\frac{|2a - b|}{\sqrt{5}}$ となり、条件から $\frac{|2a - b|}{\sqrt{5}} \leq 1$ なので、

$$|2a - b| \leq \sqrt{5}, -\sqrt{5} \leq 2a - b \leq \sqrt{5}$$



[コメント]

空間ベクトルを題材にした基本題です。(2)も平方完成だけでした。

2

問題のページへ

$$(1) \quad y = \tan x \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

$$(2) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx \text{ に対して, } y = \tan x \text{ とおくと, } x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ のとき}$$

$y = 0 \rightarrow 1$ となり, (1) から $dy = (1 + y^2)dx$ なので,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{y^4 - y^2 - 2}{y^2 - 4} \cdot \frac{dy}{1 + y^2} = \int_0^1 \frac{(y^2 + 1)(y^2 - 2)}{(y^2 - 4)(y^2 + 1)} dy = \int_0^1 \frac{y^2 - 2}{y^2 - 4} dy \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{y^2 - 4} \right) dy = \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2} \right) \right\} dy \\ &= \left[y + \frac{1}{2} \log|y-2| - \frac{1}{2} \log|y+2| \right]_0^1 = \left[y + \frac{1}{2} \log \left| \frac{y-2}{y+2} \right| \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \log 1 = 1 - \frac{1}{2} \log 3 \end{aligned}$$

[コメント]

定積分の計算問題です。(1)の誘導に従って計算すれば, 結論が導けます。

3

問題のページへ

(1) 整数 n を 4 で割った余りで分類すると, k を整数として,

(i) $n = 4k$ のとき $n^2 = 16k^2 = 8 \cdot 2k^2$

(ii) $n = 4k + 1$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + k) + 1$

(iii) $n = 4k + 2$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + 2k) + 4$

(iv) $n = 4k + 3$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1$

(i)~(iv)より, n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかである。

(2) 0 以上の整数 m, n に対して, $2^m = n^2 + 3 \cdots \cdots (*)$

まず, $(*)$ の右辺の $n^2 + 3$ を 8 で割った余りは, (1) から 3, 4, 7 のいずれかである。

また, $(*)$ の左辺の 2^m を 8 で割った余りは, $m = 0$ のとき 1, $m = 1$ のとき 2, $m = 2$ のとき 4, $m \geq 3$ のとき 0 である。

ここで, $(*)$ が成り立つには, 2^m を 8 で割った余りと $n^2 + 3$ を 8 で割った余りが等しいことが必要である。すると, $n^2 + 3$ と 2^m を 8 で割った余りがともに 4 のときになり, $m = 2$ かつ $2^2 = n^2 + 3$ のときである。

したがって, $(*)$ をみたす (m, n) は, $(m, n) = (2, 1)$ である。

[コメント]

余りで分類するタイプの整数問題です。(1)が(2)にストレートにつながります。

4

問題のページへ

- (1) 半径 1 の円の中心を O とおき、円周上の反時計回りに 4 点 A, B, C, D をとり、このとき線分 AD が直径で、 $AC = CD$, $AB = BC$ のとき、

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

- (2) $AD = 2$ から $AC = \sqrt{2}$, また $\angle ABC = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{3}{4}\pi$ から、

$BC = AB = x$ において、 $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると、

$$x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \frac{3}{4}\pi = (\sqrt{2})^2, (2 + \sqrt{2})x^2 = 2$$

$$\text{これより, } BC = x = \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})}{4 - 2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ である.}$$

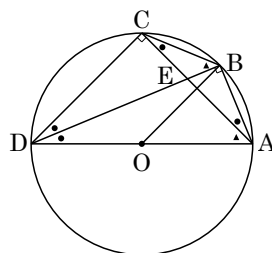
- (3) (2)から、 $\triangle ABC = \frac{1}{2}x^2 \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

ここで、線分 AC と線分 BD の交点を E とするとき、 $AB = BC$ から $\angle ADB = \angle BDC$ となり、線分 DE は $\angle ADC$ の二等分線なので、

$$AE : EC = DA : DC = 2 : \sqrt{2}$$

$$\text{これより, } \triangle BCE = \frac{EC}{AE + EC} \triangle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \triangle ABC \text{ となり,}$$

$$\triangle BCE = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2(2 - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$$



[コメント]

円を題材にした図形と計量の問題です。初めは座標設定をしようかとも思いましたが、それほどでもありませんでした。なお、いろいろな解法が考えられ、上記はその 1 例です。

5

問題のページへ

さいころを 3 回投げて出る目が順に a, b, c のとき、 $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ に対して、 $f(x) = 0$ を満たす x について、

(1) $f(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が 1 個であるのは、その実数は $x = c$ であり、

(i) $x^2 - ax + b = 0$ が虚数解をもつとき

$D = a^2 - 4b < 0$ から $a^2 < 4b \leq 24$ となり、 $1 \leq a \leq 4$ である。

- $a = 1$ のとき $4b > 1$ から、 $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- $a = 2$ のとき $b > 1$ から、 $b = 2, 3, 4, 5, 6$
- $a = 3$ のとき $4b > 9$ から、 $b = 3, 4, 5, 6$
- $a = 4$ のとき $b > 4$ から、 $b = 5, 6$

c は 6 通りずつより、 (a, b, c) は $(6 + 5 + 4 + 2) \times 6 = 102$ 通りの場合がある。

(ii) $x^2 - ax + b = 0$ が重解 $x = c$ をもつとき

$D = a^2 - 4b = 0$ から $a^2 = 4b$ ($a = 2\sqrt{b}$) となり、 $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ である。

- $(a, b) = (2, 1)$ のとき $x^2 - 2x + 1 = 0$ より重解は $x = 1$ となり、 $c = 1$
- $(a, b) = (4, 4)$ のとき $x^2 - 4x + 4 = 0$ より重解は $x = 2$ となり、 $c = 2$

これより、 (a, b, c) は 2 通りの場合がある。

(i)(ii) より、求める確率は $\frac{102+2}{6^3} = \frac{13}{27}$ である。

(2) $f(x) = 0$ をみたす自然数 x の個数が 3 個であるのは、 $x^2 - ax + b = 0$ の異なる自然数解について、 l を自然数として $D = a^2 - 4b = l^2$ ($a^2 = 4b + l^2$) が必要である。

このとき、解は $x = \frac{a \pm l}{2}$ となり、 $l^2 \leq 36 - 4 = 32$ から $1 \leq l \leq 5$ であるので、

- $l = 1$ のとき $a^2 = 4b + 1$ から、 $(a, b) = (3, 2), (5, 6)$

$(a, b) = (3, 2)$ のとき $x = \frac{3 \pm 1}{2}$ から、 c は $c \neq 1, 2$ の 4 通りで、 $(a, b) = (5, 6)$

のとき $x = \frac{5 \pm 1}{2}$ から、 c は $c \neq 2, 3$ の 4 通りとなる。

- $l = 2$ のとき $a^2 = 4b + 4 = 4(b + 1)$ から、 $(a, b) = (4, 3)$

このとき $x = \frac{4 \pm 2}{2}$ となり、 c は $c \neq 1, 3$ の 4 通りとなる。

- $l = 3$ のとき $a^2 = 4b + 9$ から、 $(a, b) = (5, 4)$

このとき $x = \frac{5 \pm 3}{2}$ となり、 c は $c \neq 1, 4$ の 4 通りとなる。

- $l = 4$ のとき $a^2 = 4b + 16 = 4(b + 4)$ から、 $(a, b) = (6, 5)$

このとき $x = \frac{6 \pm 4}{2}$ となり、 c は $c \neq 1, 5$ の 4 通りとなる。

- $l = 5$ のとき $a^2 = 4b + 25$ から、みたす (a, b) は存在しない

以上より，求める確率は $\frac{4 \times 5}{6^3} = \frac{5}{54}$ である。

[コメント]

丁寧に数え上げるタイプの確率問題です。何よりも注意力が要求されます。なお，(2)では， $x^2 - ax + b = 0$ に解と係数の関係を適用して，自然数解の値からアプローチする方法もあります。