1

解答解説のページへ

以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x)=e^{x}f(x)$ とおく。

(1)　定数関数でない関数 $f(x)$ で

条件(A)：すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である

をみたすものの例をあげよ。

(2)　関数 $f(x)$ が

条件(B)：すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である

をみたすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)をみたすとき，$F(x+n)$（ただし, n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ。

(4)　関数 $f(x)$ が(1), (2)の条件(A), (B)をともにみたすとする。

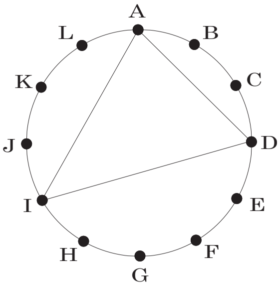
①　$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ。

②　ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ となることを示せ。

2

解答解説のページへ

右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, I を選べば, 図のような三角形が得られる。このとき, 次の問いに答えよ。



(1)　正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(2)　二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(3)　直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(4)　3 点を選んで得られる三角形のうち, 互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

3

解答解説のページへ

平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて

$$x=\sin t-t\cos t,\quad y=\cos t+t\sin t\quad (0\leqq t\leqq \pi)$$

で与えられている。

(1)　曲線 C の長さを求めよ。

(2)　曲線 C 上の各点 P において, P における接線と P で直交する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は, P を動かすときどんな図形を描くか。

(3)　$\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt$ を求めよ。

(4)　曲線 C と y 軸および直線 $y=-1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{4A}$ 解答解説のページへ

(1)　$x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2)　① 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

② ①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

$\boxed{4B}$

解答解説のページへ

(1)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

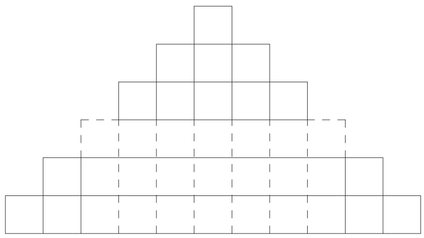
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

① $m=2,\ 3,\ 4$ のとき，どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。

② 一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

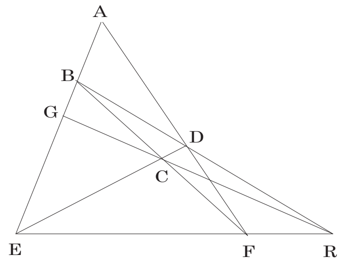
(3)　辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき下図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



$\boxed{4C}$

解答解説のページへ

右図のような四角形ABCDにおいて，直線ABと直線CDの交点E，直線BCと直線ADの交点F，直線BDと直線EFの交点R，直線RCと直線ABの交点Gがえられたとする。



(1) $\dfrac{BG}{GE} = \dfrac{BA}{AE}$ が成り立つことを示せ。

(2) GがAEの中点で，$\dfrac{AD}{DF} = 2$ であるとき，

AB $= a$，CD $= b$ とおく。次の条件をみたす x, y, z の値を求めよ。

① EB $= xa$

② EC $= yb$

③ 四角形ABCDが円に内接するとき，$a = zb$

5D

解答解説のページへ

辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。（ただし，$m,\ n>0$ とする）

(1) ① $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

　② $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうか調べよ。

(2) ① 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるときの $m,\ n$ の関係を求めよ。

　② このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

　③ G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。

5E

解答解説のページへ

k を実数とするとき，方程式

$$x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$$

の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点とみなす。

(1)　z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。

(2)　z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。

(3)　3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転して得られる 3 点を w_1，w_2，w_3 とする。w_1，w_2，w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ とが，原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ（$0\leqq\theta\leqq\pi$）の値を求めよ。

5F

解答解説のページへ

3 桁の自然数$N=100a+10b+c$（$a,\ b,\ c$ は，$1\leqq a\leqq 9$，$0\leqq b\leqq 9$，$0\leqq c\leqq 9$をみたす整数）を考える。

(1)　平方数かつ奇数であるNで, 2 次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフがx軸と接するようなものをすべて求めよ。

(2)　命題「Nおよびaが平方数のとき 2 次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフはx軸と接する」は正しいか。正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ。

(3)　あるNについて, 2 次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフは座標が整数である相異なる 2 点でx軸と交わり，グラフとx軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる。このときのNを求めよ。

5G

解答解説のページへ

(1)　平面上に半径が R, r（$R>r$）の 2 円があり，それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ。

(2)　座標平面上で x 軸を準線とし，定点 A$(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし，$a>0$ とする。

① そのような放物線の焦点 F$(s,\ t)$ の全体はどのような図形を描くか。

② x 軸上にない点 P$(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x+1)=f(x)$ は，$f(x)$ が周期 1 の周期関数であることを表す。

その 1 例として，$f(x)=\sin 2\pi x$ があげられる。

(2)　$F(x)=e^x f(x)$ より，$F'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\{f'(x)+f(x)\}$

条件(B)より，$F'(x)\leqq 0$ となり，これより $F(x)$ は単調非増加。

よって，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$

(3)　条件(A)より，正の整数 n に対して帰納的に，$f(x+n)=f(x)$ が成立する。

よって，$F(x+n)=e^{x+n}f(x+n)=e^n e^x f(x)=e^n F(x)$

(4)　(2)より，正の整数 n に対して，$F(x)\geqq F(x+n)$

(3)と合わせて，$F(x)\geqq e^n F(x)$，$(1-e^n)F(x)\geqq 0$

よって，任意の x において $F(x)\leqq 0$，すなわち，$e^x f(x)\leqq 0$ から，$f(x)\leqq 0$

すると，$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ である。

また，ある c で $f(c)=0$ であれば，$F(c)=0$

(2)より，$F(x)$ は単調非増加関数なので，$0=F(c)\geqq F(c+1)$

(3)より，$F(c+1)=eF(c)=0$

よって，$c\leqq x\leqq c+1$ において，$F(x)=0$，すなわち $f(x)=0$

条件(A)より，すべての x で $f(x)=0$

［解　説］

昨年の第 2 問に続いて，2 年連続で抽象関数についての問題が出ました。このタイプの問題でも，具体的なイメージは必要ですが，それだけでは完全な解はできません。特に，(4)の証明には試行錯誤が要求されます。なお，微分方程式が高校課程からなくなって抽象関数を扱う機会が少なくなってしまいましたが，それに逆行するような形で，抽象関数の出題があまりなかった九大での連続出題は単なる偶然でしょうか。また，二度あることは三度あるのでしょうか。

2

問題のページへ

(1)　正三角形は，△AEI，△BFJ，△CGK，△DHL の 4 つより，正三角形を与える 3 点の選び方は 4 通りとなる。

(2)　正三角形でない二等辺三角形の総数は，頂点を 1 つ決めると底辺の決め方は 4 通りずつなので，$4\times 12=48$ 通りとなる。

(1)の正三角形と合わせて，$48+4=52$ 通り。

(3)　円の直径が直角三角形の斜辺となることに着目する。

まず，斜辺を 1 つ決めるともう 1 つの頂点の決め方は 10 通りずつとなる。また斜辺の決め方は 6 通りなので，直角三角形を与える 3 点の選び方は $10\times 6=60$ 通りとなる。

(4)　点 A を頂点にもつ三角形を考えても一般性は失われない。

(i)　直角三角形の場合

AG が斜辺となるので，互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は B，C，D の 3 通りとなる。

(ii)　鈍角三角形の場合

対称性を考えると，最大辺となるのは AF, AE, AD, AC である。

互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は，最大辺が AF または AE のとき B, C の 2 通りずつ, AD または AC のとき B だけの 1 通りずつ，合わせて $2\times 2+1\times 2=6$ 通りとなる。

(iii)　鋭角三角形の場合

対称性を考えると，最大辺となるのは AF, AE である。

互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は，最大辺が AF のとき H，I の 2 通り, AE のとき I だけの 1 通り，合わせて $2+1=3$ 通りとなる。

(i)(ii)(iii)より，互いに合同でない三角形は，$3+6+3=12$ 個ある。

［解　説］

(1)から(3)までは有名問題です。昨年も会津大で $6n$ 等分の場合の類題が出ています。(4)は(3)と同じ考え方をし，最大辺に着目して解いてみました。

$\boxed{3}$

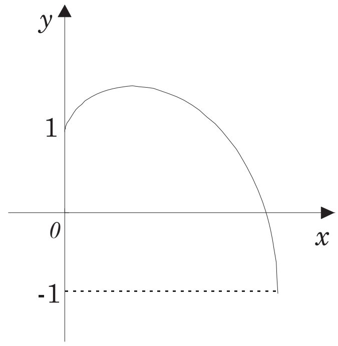
問題のページへ

(1)　$x=\sin t-t\cos t$ ………①，$y=\cos t+t\sin t$ ………②

①より，$\dfrac{dx}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$

②より，$\dfrac{dy}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$+$		$+$	0
x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	π
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1



$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=t^2\sin^2 t+t^2\cos^2 t=t^2$$

から，曲線 C の長さ l は，

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{t^2}\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

(2)　点 P における接線の方向ベクトル，すなわち法線の法線ベクトルが，

$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=t(\sin t,\ \cos t)$ と表せる。

$t\neq 0$ のとき，法線の方程式は，

$$\sin t(x-\sin t+t\cos t)+\cos t(y-\cos t-t\sin t)=0$$

$$x\sin t+y\cos t=1 \text{ ………③}$$

原点から③に下ろした垂線は，法線ベクトルを $(-\cos t,\ \sin t)$ とおけるので，

$$-x\cos t+y\sin t=0 \text{ ………④}$$

③と④の交点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が，法線上で原点までの距離が最短となる点である。

③×x＋④×y より，$(x^2+y^2)\sin t=x$，$\sin t=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ………⑤

③×y－④×x より，$(x^2+y^2)\cos t=y$，$\cos t=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ………⑥

⑤⑥より，$\dfrac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$，よって，$x^2+y^2=1$

ここで，$0<t\leqq\pi$ から $0\leqq\sin t\leqq 1$，$-1\leqq\cos t<1$ より，$0\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y<1$

また $t=0$ のとき，$\mathrm{P}(0,\ 1)$ から法線は $y=1$ で表され，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ となる。

以上より，点 Q の軌跡は，円 $x^2+y^2=1$（$x\geqq 0$）

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt = \left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt = -\frac{1}{2}\pi$

(4) $\displaystyle S = \int_0^{\pi}(y+1)\,dx = \int_0^{\pi}(\cos t + t\sin t + 1)\,t\sin t\,dt$

$\displaystyle = \int_0^{\pi}\left(t\frac{1}{2}\sin 2t + t^2\frac{1-\cos 2t}{2} + t\sin t\right)dt$

ここで(3)より，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt = -\frac{1}{4}\pi$，また，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{6}$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}t^2\sin 2t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt\right\} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt = \frac{1}{4}\pi$

$\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = \left[-t\cos t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos t\,dt = \pi$

よって，$\displaystyle S = -\frac{1}{4}\pi + \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2}\pi$

［解 説］

個々の問題の難易は標準レベルであるものの，かなり多めの計算が必要な問題です。なお(2)で，法線の式③が，円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\sin t,\ \cos t)$ における接線の式であることを見抜けば，解を短くすることができます。

4A

問題のページへ

(1)　$x \geqq y \geqq 0$ から，$x(1+y)-y(1+x)=x-y \geqq 0$ なので，$x(1+y) \geqq y(1+x)$

よって，$\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$

(2)　まず，$|x|+|y|+|z| \geqq |x+y|+|z| \geqq |x+y+z|$ より, (1)を用いて,

$$\frac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\dfrac{|x|}{1+|x|} \geqq \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots\cdots ②$

$$\frac{|y|}{1+|y|} \geqq \frac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots\cdots ④$$

②＋③＋④より，$\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots\cdots ⑤$

①⑤より，$\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$

ここで，②の等号成立は，$|y|+|z|=0$ または $|x|=0$，すなわち $y=z=0$ または $x=0$ のときである。

また，③の等号成立は，$|x|+|z|=0$ または $|y|=0$，すなわち $x=z=0$ または $y=0$ のときである。

さらに，④の等号成立は，$|x|+|y|=0$ または $|z|=0$，すなわち $x=y=0$ または $z=0$ のときである。

以上をまとめると，$x,\ y,\ z$ の少なくとも 2 つが 0 のときである。このとき，①の等号も成立する。

求める等号成立条件は, x, y, z の少なくとも 2 つが 0 である。

［解 説］

(2)は(1)の利用の方法がポイントとなりますが，三角不等式に気づかないと難しいでしょう。有名問題なので，経験がものを言います。

$\boxed{4B}$

問題のページへ

(1) 数学的帰納法により，証明する。

(i) $n=1$のとき　左辺$=1^2$，右辺$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$なので，成立。

(ii) $n=k$のとき　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$と仮定する。

両辺$+(k+1)^2$とすると，

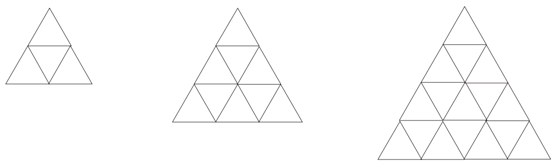
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

上式の右辺$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

よって，$n=k+1$のときも成立。

(i)(ii)より，すべての自然数nで$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2) $m=2$　$m=3$　$m=4$



k段めの個数をa_kとすると，$a_k=1+2(k-1)=2k-1$

求めるタイルの個数をN_mとすると，$N_m=\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=m^2$

(3) 正三角柱の１つのブロックの体積をv_0ととすると，$v_0=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{4}$

求める台全体の体積をVとすると，

$$V=(N_1+N_3+N_5+\cdots\cdots+N_{2n-1})v_0=v_0\sum_{k=1}^{n}N_{2k-1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\}=\frac{\sqrt{3}}{12}n(2n+1)(2n-1)$$

［解　説］

$\boxed{4}$の選択問題のなかでは，本問が最も解きやすいものです。特に(2)の前半の設問には驚いてしまいます。

$\boxed{4C}$

問題のページへ

(1)　△BER において，直線 BF, ED, RG が点 C で交わるので，チェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FR}}\cdot\frac{\mathrm{RD}}{\mathrm{DB}}=1 \text{ から，} \frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\frac{\mathrm{FR}}{\mathrm{EF}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{RD}}\cdots\cdots\cdots①$$

△REB と直線 AF に対して，メネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{RF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DR}}=1 \text{ から，} \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{RF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DR}}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}\cdots\cdots\cdots③$

(2)　$\mathrm{EB}=xa$ より，$\mathrm{AG}=\mathrm{GE}=\dfrac{1}{2}(x+1)a$，$\mathrm{BG}=\dfrac{1}{2}(x+1)a-a=\dfrac{1}{2}(x-1)a$

③より，$\dfrac{\frac{1}{2}(x-1)a}{\frac{1}{2}(x+1)a}=\dfrac{a}{(x+1)a}$，よって $x-1=1$，$x=2$

また，△AED と直線 BF に対して，メネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FD}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CE}}=1 \text{ から，} \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}=\frac{a}{2a}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$\mathrm{EC}=6\mathrm{CD}$ より，$y=6$

さらに，四角形 ABCD が円に内接するとき，方べきの定理より，

$\mathrm{EB}\cdot\mathrm{EA}=\mathrm{EC}\cdot\mathrm{ED}$ から，$2a\cdot 3a=6b\cdot 7b$，$a^2=7b^2$

よって，$a=\sqrt{7}b$ となり，$z=\sqrt{7}$

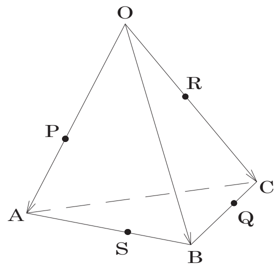
［解 説］

メネラウスの定理とチェバの定理を用いて証明するというのはすぐにわかるのですが，図形が複雑なので，どの三角形に適用すればよいのか迷います。平面幾何が趣味でなければ，パスするのが無難です。

$\boxed{5D}$

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}-\dfrac{m\vec{a}}{m+n}=\dfrac{-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$



$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}-\dfrac{n\vec{c}}{m+n}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

また同様にして，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$なので，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=\frac{1}{(m+n)^2}(-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c})\cdot(n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c})$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\left(-mn-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}mn+\frac{1}{2}n^2+mn-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}mn+\frac{1}{2}m^2-mn\right)$$

$$=0$$

よって，$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{RS}$

(2) 4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある条件は，直線 PQ と RS が交わることなので，

$$\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}+s\overrightarrow{RS}$$

となる定数 t, s が存在することである。

$$\frac{m}{m+n}\vec{a}+t\frac{-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}=\frac{n}{m+n}\vec{c}+s\frac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が 1 次独立より，

$m-tm=sn$ ………①

$tn=sm$ ………②

$tm=n-sn$ ………③

①③より，$m=n$かつ$t+s=1$

②に代入して，$t=s=\dfrac{1}{2}$

以上より, 4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある条件は，$m=n$

このとき, PQ, RS の交点 G は，$t=\dfrac{1}{2}$より，

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=\frac{\vec{a}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

また，$|\overrightarrow{OG}|=\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\dfrac{1}{4}\sqrt{1+1+1+2\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\vec{a}=\frac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

$$|\overrightarrow{AG}|=\frac{1}{4}|-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\frac{1}{4}\sqrt{9+1+1-6\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\dfrac{\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}}{4}$なので，$|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

以上より，G は正四面体 OABC に外接する球の中心であり，球の半径は$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$となる。

［解 説］

よくある構図の問題で，$\boxed{5}$の選択 4 題のなかでは最も基本的です。方針に迷いは生じないでしょう。

5E

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2$ とすると，

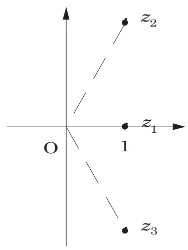
$f(1)=1-(2k+1)+(4k^2+2k)-4k^2=0$ から，

$$f(x)=(x-1)(x^2-2kx+4k^2)$$

$f(x)=0$ の解は，$x=1$，$x=k\pm\sqrt{3}ki=k(1\pm\sqrt{3}i)$

よって，$z_1=1$，$z_2=k(1+\sqrt{3}i)$，

$z_3=k(1-\sqrt{3}i)=\overline{z_2}$ とおくことができる。



3 点 z_1，z_2，z_3 が一直線上にある条件は，z_2，z_3 が虚数のとき $k=1$ となり，z_2，z_3 が実数のとき

$z_2=z_3=0$ から $k=0$ となる。

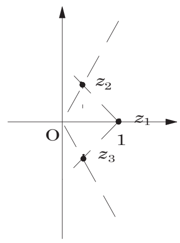
以上より，$k=0$，1

(2)　3 点 z_1，z_2，z_3 が直角三角形をつくるとき，

$\angle z_2z_1z_3=\dfrac{\pi}{2}$ から z_1 と z_2 を結ぶ線分と実軸，

z_1 と z_3 を結ぶ線分と実軸のなす角はともに $\dfrac{\pi}{4}$

となる。



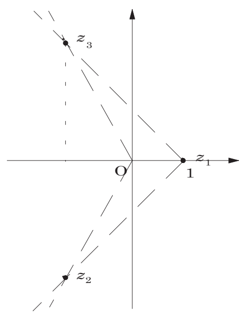
$k>0$ のとき，$k\tan\dfrac{\pi}{3}=(1-k)\tan\dfrac{\pi}{4}$

$\sqrt{3}k=1-k$ から，$k=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$k<0$ のとき，$-k\tan\dfrac{\pi}{3}=(1-k)\tan\dfrac{\pi}{4}$

$-\sqrt{3}k=1-k$ から，$k=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

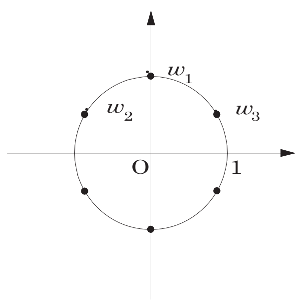
以上より，$k=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$



(3)　$|z_1|=|z_2|=|z_3|$ から $1=2|k|$，$k=\pm\dfrac{1}{2}$

(i)　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき

原点と z_2 を結ぶ線分と実軸，原点と z_3 を結ぶ線分と実軸のなす角はともに $\dfrac{\pi}{3}$ なので，3 点 z_3，z_1，z_2 を回転してできる 3 点 w_3，w_1，w_2 は正六角形の隣り合う頂点となる。



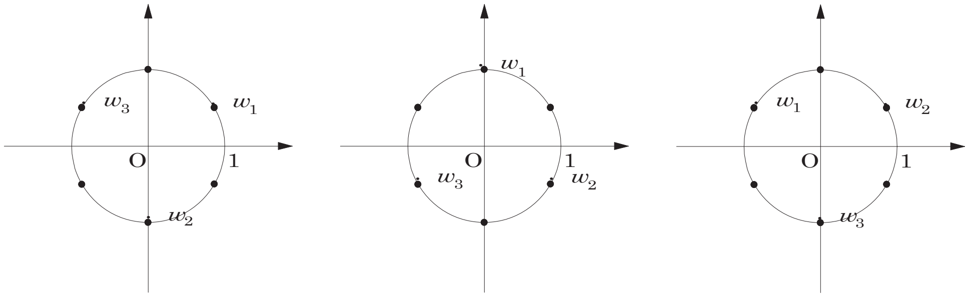
回転角 θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ から，条件をみたす w_1，w_2，w_3 の配置は右図のようになる。すなわち

点 1 が点 i に回転する場合より，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(ii)　$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき

原点と z_2 を結ぶ線分と実軸，原点と z_3 を結ぶ線分と実軸のなす角はともに $\dfrac{2\pi}{3}$ なので，3 点 z_2，z_1，z_3 を回転してできる 3 点 w_2，w_1，w_3 は正六角形の一つおきの頂点となる。

回転角 θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ から，条件をみたす w_1，w_2，w_3 の配置は下図のようになる。すなわち点 1 が点 $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，i，$\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ に回転する場合より，それぞれ，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5\pi}{6}$ となる。



(i)(ii)より，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5\pi}{6}$

[解 説]

文系の方にも類題があり，そちらは問題文の冒頭に k が正と書かれているために，場合分けも必要なく，さらりと解けるのですが，理系ではこの「正」という条件がないために，k が負や 0 の場合も考える必要があります。このため，かなり注意深く論理を進めていかなくてはいけません。

$\boxed{5F}$　問題のページへ

(1)　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と接することより，

$$b^2-4ac=0,\ \ b^2=4ac\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より b は偶数となり，$b=0, 2, 4, 6, 8$。また, N が奇数より c は奇数となる。

(i)　$b=0$ のとき

①より $ac=0$ となるが，$a \geqq 1$ から $c=0$ となり c が奇数ということに反する。

(ii)　$b=2$ のとき

①より $ac=1$ となり，$a \geqq 1$ から $(a,\ c)=(1,\ 1)$。このとき，$N=121=11^2$

(iii)　$b=4$ のとき

①より $ac=4$ となり，$a \geqq 1$, c が奇数から $(a,\ c)=(4,\ 1)$。このとき，

$N=441=21^2$。

(iv)　$b=6$ のとき

①より $ac=9$ となり，$a \geqq 1$, c が奇数から $(a,\ c)=(9,\ 1),\ (3,\ 3),\ (1,\ 9)$。

このとき，$N=961=31^2$，$N=363=3\cdot 11^2$，$N=169=13^2$。

(v)　$b=8$ のとき

①より $ac=16$ となり，$1 \leqq a \leqq 9$, c が奇数から適する $(a,\ c)$ は存在しない。

以上より，$N=121,\ 169,\ 441,\ 961$

(2)　正しくない。反例 : $N=14^2=196,\ a=1^2=1$

(3)　x 軸との交点を $x=m,\ n$ （$m<n$）とすると，

$y=ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)\cdots\cdots$②となり，条件より，

$$-\int_m^n a(x-m)(x-n)dx=4 \text{ から，} \frac{a}{6}(n-m)^3=4$$

$$a(n-m)^3=2^3\cdot 3\ \ (1 \leqq a \leqq 9,\ 1 \leqq n-m)$$

a, m, n が整数より，$a=3,\ n-m=2$

よって②より，$y=3(x-m)(x-m-2)=3x^2-6(m+1)x+3m(m+2)\cdots\cdots$③

$0 \leqq b \leqq 9,\ 0 \leqq c \leqq 9$ から，$0 \leqq -6(m+1) \leqq 9,\ 0 \leqq 3m(m+2) \leqq 9$

$-\dfrac{5}{2} \leqq m \leqq -1$ かつ $-3 \leqq m \leqq -2,\ 0 \leqq m \leqq 1$ で m は整数より，$m=-2$

③は $y=3x^2+6x$ で $a=3,\ b=6,\ c=0$ となり，以上より $N=360$

［解 説］

3 桁の平方数で奇数のものは，11^2，13^2, ……, 31^2 まで 11 個ありますが，これを 1 つずつチェックするとたいへんです。上の①の条件をもとに b の値で場合分けをして解を作りました。

5G

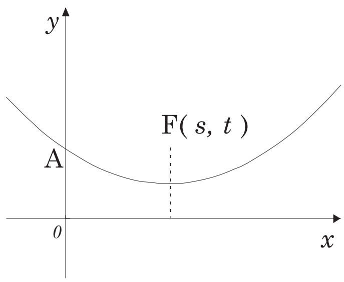
問題のページへ

(1)　2 円が共有点をもつ条件は，中心間距離が半径の差以上，半径の和以下より，

$$R-r\leqq l\leqq R+r$$

(2)　放物線は，準線が x 軸で y 軸と正の部分で交わることより x 軸の上方にあり，焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ から頂点 $\left(s,\ \dfrac{t}{2}\right)$ で，頂点と焦点の距離が $\dfrac{t}{2}$ から，その方程式は，

$$(x-s)^2=4\cdot\frac{t}{2}\left(y-\frac{t}{2}\right)\cdots\cdots\cdots①$$



点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るので，$s^2=2t\left(a-\dfrac{t}{2}\right)$

$$s^2+t^2-2at=0$$
$$s^2+(t-a)^2=a^2\cdots\cdots\cdots②$$

よって②から，点 F は中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を描く。ただし，$t>0$ より原点を除く。

さて，①が点 $\mathrm{P}(p,\ q)$（$q>0$）を通るとき，$(p-s)^2=4\cdot\dfrac{t}{2}\left(q-\dfrac{t}{2}\right)$ から，

$$(s-p)^2+(t-q)^2=q^2\cdots\cdots\cdots③$$

②は，$s^2+(t-a)^2=a^2$（$t\neq0$）$\cdots\cdots\cdots$④

ここで，③と④をともにみたす $(s,\ t)$ が存在する $p,\ q$ の関係が求める条件なので，(1)の結果から，

(i)　$p\neq0$ のとき

$|q-a|\leqq\sqrt{p^2+(q-a)^2}\leqq q+a$ より，$(q-a)^2\leqq p^2+(q-a)^2\leqq(q+a)^2$

左側の不等式はつねに成立するので，右側の不等式を変形して，

$$p^2-4aq\leqq0,\quad q\geqq\frac{1}{4a}p^2$$

(ii)　$p=0$ のとき

③は $s^2+(t-q)^2=q^2$ となり，求める条件は $q=a$

(i)(ii)より，$q\geqq\dfrac{1}{4a}p^2$（$p\neq0$），$q=a$（$p=0$）

［解 説］

(2)の設問は，一見(1)とは無関係と見えるものの，解のネックとなる部分で(1)の結果を利用します。従来から誘導のうまさには定評のある九大らしい問題です。