

1

解答解説のページへ

$k$  を実数として、 $f(x) = x^2 - 2kx + \frac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$  とおく。方程式  $f(x) = 0$  が実数解  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \leq \beta$ ) をもつとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha, \beta$  が  $\alpha \leq 1 \leq \beta$  を満たすように  $k$  の値の範囲を定めよ。
- (2) (1)の場合に  $f(x)$  の最小値がとりうる値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし、高さが  $\sqrt{3}$  の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を  $l$  とする。直円錐の頂点を C, 底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

- (1) 直円錐の展開図を用いて、 $l$  の長さを求めよ。
- (2)  $l$  上の点 P に対して、線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。  $\angle AOQ = \theta$  とし  $CP^2$  を  $\sin \theta$  で表せ。ただし、  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。
- (3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし、A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。  $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$  の範囲で  $\frac{OS^2}{OR^2}$  の最大値を求めよ。

3A

解答解説のページへ

実数  $p$ , 自然数  $q$  に対して, 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  をそれぞれ

$$a_1 = 1, a_{n+1} = pa_n - p, b_1 = q, b_{n+1} = b_n + (-1)^{n+1}q$$

と定める。

- (1)  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めよ。
- (2) 数列  $\{a_n\}$  をはじめから順に区画に分け, 第  $m$  区画に属する項の個数が  $b_m$  となるようにする。  $m$  を正の偶数とするとき第  $m$  区画に属する項の和  $T_m$  を求めよ。

3B

[解答解説のページへ](#)

実数  $a, b$  は  $0 < a < b$  を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3}, \sqrt{ab}, \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

3C

解答解説のページへ

次の(1), (2)では, それぞれ, その目的を実行するための BASIC によるプログラムの始めの部分が与えられている。方針を記述してから, プログラムの残りの部分を完成せよ。ただし, 変数 A(1), A(2)等には座標  $a_1, a_2$  等が入力されるものとする。

注意 : (1)のプログラムでは配列を表すために DIM 文を使っているが, DIM 文を使わないプログラムを作成してもよい。そのときは, 行番号 10 の文は消去し, 行番号 20, 30 の文は

```
20 INPUT A1, A2
```

```
30 INPUT P1, P2
```

で置き換えるものとする。(2)についても, 同様である。

(1) 座標平面上の原点 O と異なる点 A ( $a_1, a_2$ ) について, 任意の点 P ( $p_1, p_2$ ) から直線 OA への距離を表示すること。

```
10 DIM A(2), P(2)
```

```
20 INPUT A(1), A(2)
```

```
30 INPUT P(1), P(2)
```

(2) 点 A ( $a_1, a_2$ ), B ( $b_1, b_2$ ) を座標平面上の相異なる点とし, 直線 AB で平面を二分する。点 P ( $p_1, p_2$ ), Q ( $q_1, q_2$ ) がこの直線の同じ側にあるときは 1 を, 異なる側にあるときは -1 を, P, Q の少なくとも一方がこの直線上にあるときは 0 を表示すること。ただし, ある点と直線との距離が, 与えられた正数 0.00001 より小さいときはその点は直線上にあるとみなすことにする。

```
10 DIM A(2), B(2), P(2), Q(2)
```

```
20 EPS = 0.00001
```

```
30 INPUT A(1), A(2)
```

```
40 INPUT B(1), B(2)
```

```
50 INPUT P(1), P(2)
```

```
60 INPUT Q(1), Q(2)
```

4D

解答解説のページへ

A, B の 2 名で次のゲームを行う。A, B はそれぞれ表に 1 から  $n$  までの数字がひとつずつ書かれた  $n$  枚のカードを持っている(裏には何も書かれていない)。A は自分のすべてのカードを表を下にして並べる。B は, A が並べたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつ並べる。次に A のカードを表向きにし, B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る。確率変数  $X$  を B が 1 回のゲームで得る点数とするととき次の問いに答えよ。

- (1)  $n = 5$  のとき確率  $P(X = 2)$  を求めよ。  
 (2) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を  $p$  とする。

$$p = \sum_{k=1}^n a_k P(X = k) \text{ と表すとき, } a_k \text{ (} k = 1, 2, \dots, n \text{) を求めよ。}$$

- (3) 期待値  $E(X)$  を求めよ。

4E

解答解説のページへ

$k$  を実数として、2 次方程式  $x^2 + 2kx + 3k = 0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ) とする。  
 $i$  を虚数単位として次の問いに答えよ。

- (1)  $|\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2$  の値を  $k$  を用いて表せ。
- (2) 複素数平面において、複素数  $\alpha, \beta, i$  を表す点をそれぞれ A, B, P とする。  
 $\angle APB$  が直角となるような  $k$  の値を求めよ。

4F

解答解説のページへ

大きさ 1 の空間ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  が  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$  を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$ ,  $\vec{f}$  が

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{e} = 1, \quad \vec{c} \cdot \vec{e} = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{f} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{f} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{f} = 1$$

を満たすとき、点  $D(\vec{d})$ ,  $E(\vec{e})$ ,  $F(\vec{f})$  および原点  $O$  について次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$  となるような実数  $x, y, z$  を求めよ。同様に  $\vec{f}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  で表せ。
- (2) ベクトル  $\vec{d}$ ,  $\vec{f}$ ,  $\vec{d} - \vec{f}$  の大きさを求めよ。
- (3) 三角形  $ODF$  の面積を求めよ。
- (4) 四面体  $ODEF$  の体積を求めよ。



1

問題のページへ

$$(1) f(x) = x^2 - 2kx + \frac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$$

$f(x) = 0$  の実数解  $\alpha, \beta$  が  $\alpha \leq 1 \leq \beta$  を満たす条件は,

$$f(1) = 1 - 2k + \frac{1}{5}(2k-1)(4k-3) \leq 0$$

$$(2k-1)(-5+4k-3) \leq 0 \text{ より, } \frac{1}{2} \leq k \leq 2$$

$$(2) f(x) = (x-k)^2 - k^2 + \frac{1}{5}(2k-1)(4k-3) = (x-k)^2 + \frac{3}{5}k^2 - 2k + \frac{3}{5} \text{ より,}$$

$f(x)$  の最小値を  $m(k)$  とおくと,

$$m(k) = \frac{3}{5}k^2 - 2k + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}\left(k - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{15}$$

$$(1) \text{ より, } \frac{1}{2} \leq k \leq 2 \text{ なので, } m\left(\frac{5}{3}\right) \leq m(k) \leq m\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{よって, } -\frac{16}{15} \leq m(k) \leq -\frac{1}{4}$$

### [解説]

文系の第1問は超基本です。計算ミス以外に減点の可能性が考えられないくらいです。

2

問題のページへ

(1) 母線 AC の長さは  $\sqrt{1+3} = 2$  となるので、側面の展開図の中心角を  $\varphi$  とすると、

$$2\pi \cdot 1 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} \text{ より, } \varphi = 180^\circ$$

線分 AB は底面の直径なので、 $\angle ACB = 90^\circ$

よって、 $l$  の長さは展開図で  $AB = 2\sqrt{2}$  となる。

(2) 弧 AQ の長さは、底面では  $2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\theta}{360^\circ}$  であるが、側面の

展開図では  $2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\angle ACQ}{360^\circ}$  と表せるので、 $\angle ACQ = \frac{\theta}{2}$

$\triangle APC$  に正弦定理を適用すると、 $\angle CAP = 45^\circ$  から、

$$\frac{CP}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin\left(135^\circ - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$CP = \frac{2 \sin 45^\circ}{\sin\left(135^\circ - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{よって, } CP^2 = \frac{2}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{4}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{4}{1 + \sin \theta}$$

(3)  $\triangle COQ$  について考えると、 $\frac{OR}{OQ} = \frac{CP}{CQ}$  から、

$$OR = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{1 + \sin \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \theta}} \text{ より, } OR^2 = \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

次に底面について、 $OS = OA \cos \theta = \cos \theta$  より  $OS^2 = \cos^2 \theta$

$$\text{よって, } \frac{OS^2}{OR^2} = \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) = (1 - \sin^2 \theta)(1 + \sin \theta)$$

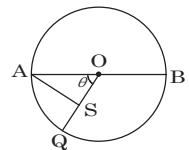
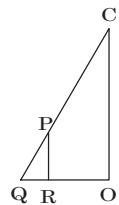
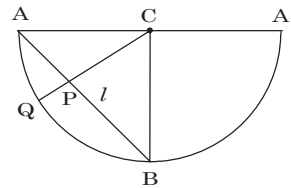
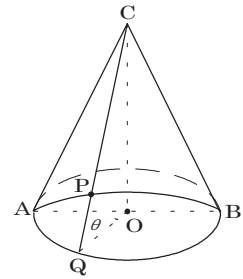
$\sin \theta = t$  とおくと、 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$  より  $0 < t \leq 1$

このとき、 $f(t) = (1 - t^2)(1 + t)$  とおくと、

$$f'(t) = -2t(1 + t) + (1 - t^2)$$

$$= -(3t - 1)(t + 1)$$

$f(t)$  は  $t = \frac{1}{3}$  のとき最大値  $\frac{32}{27}$  をとる。すなわち  $\frac{OS^2}{OR^2}$  の最大値は  $\frac{32}{27}$  である。



$t$	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	

### [解説]

断面図や展開図を書かないと、位置関係がとらえきれない問題です。

3A

問題のページへ

(1)  $a_1 = 1, a_{n+1} = pa_n - p$

(i)  $p = 1$  のとき  $a_{n+1} = a_n - 1$  より,  $a_n = 1 - (n-1) = -n + 2$

$$S_n = \frac{1 + (-n + 2) \cdot n}{2} = \frac{n(-n + 3)}{2}$$

(ii)  $p \neq 1$  のとき  $\alpha = \frac{-p}{1-p}$  として,  $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$

$$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha = \left(1 - \frac{-p}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{-p}{1-p} = \frac{1}{1-p}(p^{n-1} - p)$$

$$S_n = \frac{1}{1-p} \left\{ \frac{1 \cdot (1 - p^n)}{1-p} - pn \right\} = \frac{1}{(1-p)^2} \{1 - p^n - p(1-p)n\}$$

(2)  $b_1 = q, b_{n+1} = b_n + (-1)^{n+1}q$

$$n \geq 2 \text{ で, } b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1}q = q + q \cdot \frac{(-1)^2 \{1 - (-1)^{n-1}\}}{1 - (-1)} = \frac{q}{2} \{3 - (-1)^{n-1}\}$$

$n = 1$  をあてはめると,  $b_1 = \frac{q}{2}(3-1) = q$  となり  $n = 1$  のときも成立する。

すると,  $n$  が奇数のとき  $b_n = q$ ,  $n$  が偶数のとき  $b_n = 2q$  となる。

さて, 第  $m$  区画末項までの項数は,  $m$  が偶数より  $\frac{m}{2} \cdot q + \frac{m}{2} \cdot 2q = \frac{3}{2}mq$  であり,

これから第  $m$  区画の初項は,  $n_0 = \frac{3}{2}mq - 2q + 1 = \left(\frac{3}{2}m - 2\right)q + 1$  項目となる。

(i)  $p = 1$  のとき (1)より数列  $\{a_n\}$  は等差数列となるので,

$$\text{第 } m \text{ 区画の初項は, } a_{n_0} = -\left\{\left(\frac{3}{2}m - 2\right)q + 1\right\} + 2 = 1 - \left(\frac{3}{2}m - 2\right)q$$

$$\text{第 } m \text{ 区画の末項は, } a_{\frac{3}{2}mq} = 2 - \frac{3}{2}mq$$

$$\text{よって, } T_m = \frac{1 - \left(\frac{3}{2}m - 2\right)q + 2 - \frac{3}{2}mq}{2} \cdot 2q = 3q - (3m - 2)q^2$$

(ii)  $p \neq 1$  のとき (1)より  $a_n = \frac{1}{1-p}(p^{n-1} - p)$  なので,

$$\begin{aligned} \text{よって, } T_m &= \frac{1}{1-p} \sum_{k=n_0}^{\frac{3}{2}mq} (p^{k-1} - p) = \frac{1}{1-p} \left\{ p^{\left(\frac{3}{2}m-2\right)q} \cdot \frac{1-p^{2q}}{1-p} - p \cdot 2q \right\} \\ &= \frac{1}{(1-p)^2} \left\{ p^{\left(\frac{3}{2}m-2\right)q} (1-p^{2q}) - 2p(1-p)q \right\} \end{aligned}$$

### [解説]

内容は群数列だけですが, 計算が複雑で疲れてしまう問題です。

3B

問題のページへ

$$\text{まず, } \left(\frac{a+2b}{3}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{4b^2 - 5ab + a^2}{4} = \frac{(4b-a)(b-a)}{4}$$

$$0 < a < b \text{ なので, } \left(\frac{a+2b}{3}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 > 0$$

$$\text{よって, } \frac{a+2b}{3} > \sqrt{ab} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } \left(\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3 - \left(\frac{a+2b}{3}\right)^3 &= \frac{b(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{(a+2b)^3}{27} \\ &= \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{27} \\ &= \frac{(b-a)^3}{27} \end{aligned}$$

$$0 < a < b \text{ なので, } \left(\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3 - \left(\frac{a+2b}{3}\right)^3 > 0$$

$$\text{よって, } \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}} > \frac{a+2b}{3} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}} > \frac{a+2b}{3} > \sqrt{ab}$$

### [解説]

解に必要なスペースからもわかるように、3 題の選択題のなかでは、他の 2 題と比べてかなり易くなっています。なお、上の解には書いていませんが、まず  $a=1$ ,  $b=4$  として各式の値を計算し、大小関係を予測して解いています。

3C

問題のページへ

- (1)  $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$  より, 直線  $OA : a_2x - a_1y = 0$  と表せるので,  $B = |a_2p_1 - a_1p_2|$ ,  
 $C = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  とすると, 点  $P$  と直線  $OA$  の距離  $D$  は  $D = \frac{B}{C}$  となる。

```

10 DIM A(2), P(2)
20 INPUT A(1), A(2)
30 INPUT P(1), P(2)
40 B=ABS(A(2)*P(1)-A(1)*P(2))
50 C=SQR(A(1)^2+A(2)^2)
60 D=B/C:PRINT D
70 END

```

- (2)  $\overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$  より直線  $AB : (a_2 - b_2)(x - a_1) - (a_1 - b_1)(y - a_2) = 0$   
 $C = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ ,  $D = (a_2 - b_2)(p_1 - a_1) - (a_1 - b_1)(p_2 - a_2)$ ,  
 $E = (a_2 - b_2)(q_1 - a_1) - (a_1 - b_1)(q_2 - a_2)$  とおくと, 点  $P$ , 点  $Q$  と直線  $AB$  の距離  
は, それぞれ  $\frac{|D|}{C}$ ,  $\frac{|E|}{C}$  なので,  $\frac{|D|}{C} < 0.00001$  または  $\frac{|E|}{C} < 0.00001$  のときは, 0  
を表示する。この場合以外については,  $D \cdot E > 0$  のときは  $P$  と  $Q$  が直線  $AB$  の同  
じ側にあるので 1 を表示, そうでなければ -1 を表示する。

```

10 DIM A(2), B(2), P(2), Q(2)
20 EPS = 0.00001
30 INPUT A(1), A(2)
40 INPUT B(1), B(2)
50 INPUT P(1), P(2)
60 INPUT Q(1), Q(2)
70 C=SQR((A(1)-B(1))^2+(A(2)-B(2))^2)
80 D=(A(2)-B(2))*(P(1)-A(1))-(A(1)-B(1))*(P(2)-A(2))
90 E=(A(2)-B(2))*(Q(1)-A(1))-(A(1)-B(1))*(Q(2)-A(2))
100 IF ABS(D)/C<EPS THEN PRINT "0":GOTO 130
110 IF ABS(E)/C<EPS THEN PRINT "0":GOTO 130
120 IF D*E>0 THEN PRINT "1" ELSE PRINT "-1"
130 END

```

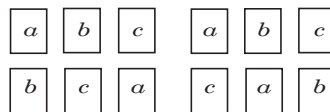
## [解説]

(2)ではさまざまなプログラムが考えられ, 採点がたいへんでしょう。

4D

問題のページへ

- (1) 5枚のカードの並べ方は5!通りある。5枚のカードで2枚だけ数字が一致するのは、そのカードの選び方が ${}_5C_2$ 通りで、残りの3枚が一致しない場合、その数字を $a, b, c$ とすると、右図のように2通りある。



$$\text{よって、} P(X=2) = \frac{{}_5C_2 \times 2}{5!} = \frac{1}{6}$$

- (2)  $a_k P(X=k)$  は1を含めて $k$ 枚の数字が一致する確率を表し、その確率を $k=1$ の場合から $k=n$ の場合まで加えると、数字1のカードが一致する確率 $p$ となる。また、 $P(X=k)$ は $k$ 枚の数字が一致する確率である。

したがって、 $a_k$ は $k$ 枚の数字が一致する条件のもとで、その $k$ 枚の中の1枚が1である確率を意味する。すると、 $k$ 枚のカードの数字の選び方が ${}_n C_k$ 通り、1以外の数字の選び方が ${}_{n-1} C_{k-1}$ 通りとなるので、

$$a_k = \frac{{}_{n-1} C_{k-1}}{{}_n C_k} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k}{n}$$

- (3)  $E(X) = \sum_{k=1}^n k P(X=k)$  であり、(2)より $k = n a_k$ なので、

$$E(X) = \sum_{k=1}^n n a_k P(X=k) = n p$$

ここで、数字1が一致する確率は、 $p = \frac{1}{n}$ より、

$$E(X) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

### [解説]

(2)が(3)のうまい誘導となっていて、おもしろい問題です。なお、解のポイントとなる(2)では、 $a_k$ の意味がすぐにはつかめませんでしたので、こんなときはいつものように $k=1, 2, 3, \dots$ と具体的に考えていきました。そうすると思考がまとまりました。

4E

問題のページへ

(1)  $x^2 + 2kx + 3k = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$  の 2 つの解が  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ) なので,

$$\alpha + \beta = -2k, \quad \alpha\beta = 3k \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また,  $\textcircled{1}$  の判別式  $D/4 = k^2 - 3k = k(k-3)$ (i)  $D/4 > 0$  ( $k < 0, 3 < k$ ) のとき

$$|\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2 = (\alpha^2 + 1) + (\beta^2 + 1) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } |\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2 = 4k^2 - 6k + 2$$

(ii)  $D/4 < 0$  ( $0 < k < 3$ ) のとき $\textcircled{1}$  の解は  $\alpha, \bar{\alpha}$  となるので,  $\textcircled{2}$  は  $\alpha + \bar{\alpha} = -2k, \alpha\bar{\alpha} = 3k \cdots \cdots \textcircled{2}'$ 

$$\begin{aligned} |\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2 &= (\alpha - i)(\bar{\alpha} - \bar{i}) + (\bar{\alpha} - i)(\alpha - \bar{i}) \\ &= (\alpha - i)(\bar{\alpha} + i) + (\bar{\alpha} - i)(\alpha + i) \\ &= 2\alpha\bar{\alpha} + 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2}' \text{ より, } |\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2 = 6k + 2$$

(2)  $\angle APB = 90^\circ$  のとき, 三平方の定理より,

$$|\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2 = |\alpha - \beta|^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i)  $D/4 > 0$  ( $k < 0, 3 < k$ ) のとき

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4k^2 - 12k$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } 4k^2 - 6k + 2 = 4k^2 - 12k$$

$$k = -\frac{1}{3} \quad (\text{この値は } k < 0, 3 < k \text{ を満たす})$$

(ii)  $D/4 < 0$  ( $0 < k < 3$ ) のとき

$$|\alpha - \bar{\alpha}|^2 = (\alpha - \bar{\alpha})(\bar{\alpha} - \alpha) = 2\alpha\bar{\alpha} - \{(\alpha + \bar{\alpha})^2 - 2\alpha\bar{\alpha}\} = 12k - 4k^2$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } 6k + 2 = 12k - 4k^2, \quad 2k^2 - 3k + 1 = 0$$

$$k = 1, \quad \frac{1}{2} \quad (\text{この値は } 0 < k < 3 \text{ を満たす})$$

(i)(ii)より,  $k = -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ 

## [解説]

複素数に関する頻出問題の一つです。要点は, 2 次方程式 $\textcircled{1}$ が実数解をもつときと虚数解をもつときとを場合分けすることです。

4F

問題のページへ

$$(1) \text{ 条件より, } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1 \text{ より, } \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 1 \text{ なので, } x - \frac{1}{2}y = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0 \text{ より, } \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0 \text{ なので, } -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \text{ より, } \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0 \text{ なので, } -\frac{1}{2}y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より, } (x, y, z) = \left( \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{また, } \vec{f} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c} \text{ において同様にすると, } \vec{a} \cdot \vec{f} = 0 \text{ より } u - \frac{1}{2}v = 0,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{f} = 0 \text{ より } -\frac{1}{2}u + v - \frac{1}{2}w = 0, \vec{c} \cdot \vec{f} = 1 \text{ より } -\frac{1}{2}v + w = 1$$

$$\text{よって, } (u, v, w) = \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right) \text{ から, } \vec{f} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$$

$$(2) (1) \text{ より, } |\vec{d}|^2 = \left| \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right|^2 = \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$|\vec{f}|^2 = \left| \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって, } |\vec{d}| = |\vec{f}| = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{また, } \vec{d} - \vec{f} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \vec{a} - \vec{c}$$

$$|\vec{d} - \vec{f}|^2 = |\vec{a} - \vec{c}|^2 = 1 - 2 \cdot 0 + 1 = 2 \text{ なので, } |\vec{d} - \vec{f}| = \sqrt{2}$$

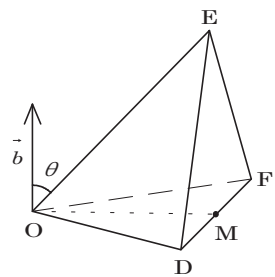
$$(3) \triangle ODF \text{ は } OD = OF = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ の二等辺三角形より, 底辺 } DF = \sqrt{2} \text{ の中点を } M \text{ とおくと, } OM = \sqrt{\left( \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = 1 \text{ となる。}$$

$$\text{よって, } \triangle ODF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(4) \vec{b} \cdot \vec{d} = 0, \vec{b} \cdot \vec{f} = 0 \text{ より, } \vec{b} \text{ は平面 } ODF \text{ に垂直である。}$$

ここで,  $\vec{b}$  と  $\vec{e}$  のなす角を  $\theta$  とおくと,  $\vec{b} \cdot \vec{e} = 1, |\vec{b}| = 1$  から,  $|\vec{e}| \cos \theta = 1$  となる。

これは,  $\triangle ODF$  を底面とするとき, 四面体 ODEF の高さが 1 であることを表すので, 体積は  $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{6}$  となる。



## [解説]

(4)では,  $\vec{b}$  が平面 ODF の法線ベクトルであるのに注目して解きました。