$\boxed{1}$

解答解説のページへ

m を 2 以上の自然数, e を自然対数の底とする。

(1)　方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ を満たす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ。またその値を c とするとき, $m-1 < c < m$ となることを示せ。

(2)　$x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ。

(3)　a_m を(2)で求められる $f(x)$ の最小値とするとき, $\displaystyle\lim_{m \to \infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C, 底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1) 直円錐の展開図を用いて, l の長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ} = \theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし, A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0° < \theta \leqq 90°$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

(1)　実数$k \geqq 0$に対し,

$$\int_0^{2\pi} \left\{ y\left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2 \right) - \left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right\} \cos\theta \, d\theta = 2k\pi$$

を満たす xy 平面内の曲線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた曲線と直線$y = a$との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ。

4A

解答解説のページへ

関数 $f(x)=1-x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2)　a を(1)で求めた実数とする。$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|f(x)-f(a)| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$ となることを示せ。

(3)　a を(1)で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として，

$$x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば，$x_1=a$ であることを示せ。

$\boxed{4B}$

解答解説のページへ

実数 a, b は $0<a<b$ を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\ \sqrt{ab},\ \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

4C

解答解説のページへ

次の(1), (2)では, それぞれ, その目的を実行するための BASIC によるプログラムの始めの部分が与えられている。方針を記述してから, プログラムの残りの部分を完成せよ。ただし, 変数 A(1), A(2)等には座標 a_1, a_2 等が入力されるものとする。

注意：(1)のプログラムでは配列を表すために DIM 文を使っているが, DIM 文を使わないプログラムを作成してもよい。そのときは, 行番号 10 の文は消去し, 行番号 20, 30 の文は

```
20　INPUT　A1, A2
30　INPUT　P1, P2
```

で置き換えるものとする。(2)についても, 同様である。

(1)　座標平面上の原点 O と異なる点 A$(a_1,\ a_2)$ について, 任意の点 P$(p_1,\ p_2)$ から直線 OA への距離を表示すること。

```
10　DIM　A(2), P(2)
20　INPUT　A(1), A(2)
30　INPUT　P(1), P(2)
```

(2)　点 A$(a_1,\ a_2)$, B$(b_1,\ b_2)$ を座標平面上の相異なる点とし, 直線 AB で平面を二分する。点 P$(p_1,\ p_2)$, Q$(q_1,\ q_2)$ がこの直線の同じ側にあるときは 1 を, 異なる側にあるときは -1 を, P, Q の少なくとも一方がこの直線上にあるときは 0 を表示すること。ただし, ある点と直線との距離が, 与えられた正数 0.00001 より小さいときはその点は直線上にあるとみなすことにする。

```
10　DIM　A(2), B(2), P(2), Q(2)
20　EPS = 0.00001
30　INPUT　A(1), A(2)
40　INPUT　B(1), B(2)
50　INPUT　P(1), P(2)
60　INPUT　Q(1), Q(2)
```

5D

解答解説のページへ

A, B の 2 名で次のゲームを行う。A, B はそれぞれ表に 1 から n までの数字がひとつずつ書かれた n 枚のカードを持っている(裏には何も書かれていない)。A は自分のすべてのカードを表を下にして並べる。B は，A が並べたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつ並べる。次に A のカードを表向きにし，B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る。確率変数 X を B が 1 回のゲームで得る点数とするとき次の問いに答えよ。

(1)　$n=5$ のとき確率 $P(X=2)$ を求めよ。

(2)　B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を p とする。

$p=\sum_{k=1}^{n} a_k P(X=k)$ と表すとき，a_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(3)　期待値 $E(X)$ を求めよ。

$\boxed{\text{5E}}$ 解答解説のページへ

k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。i を虚数単位として次の問いに答えよ。

(1) $|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ。

(2) 複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする。$\angle\mathrm{APB}$ が直角となるような k の値を求めよ。

$\boxed{5\mathrm{F}}$ 解答解説のページへ

大きさ 1 の空間ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$が$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル$\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\quad \vec{c}\cdot\vec{d}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{e}=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\quad \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\quad \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

を満たすとき, 点$\mathrm{D}(\vec{d})$, $\mathrm{E}(\vec{e})$, $\mathrm{F}(\vec{f})$および原点 O について次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$となるような実数$x, y, z$を求めよ。同様に$\vec{f}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。

(2)　ベクトル$\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{d}-\vec{f}$の大きさを求めよ。

(3)　三角形 ODF の面積を求めよ。

(4)　四面体 ODEF の体積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$g(x)=xe^x-me^x+m$ とおくと，$g'(x)=e^x+xe^x-me^x=(x+1-m)e^x$

$m\geqq 2$ より，$m-1\geqq 1$ となるので，$g(x)$ の増減は下表のようになる。

x	0	$\cdots$	$m-1$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	∞

よって，$g(x)=0$ は $x>0$ でただ 1 つの実数解をもつ。

また，$g(m-1)<g(0)=0$

$$g(m)=me^m-me^m+m=m>0$$

以上より，$g(x)=0$ の解 $x=c$ は $m-1<c<m$ の範囲にある。

(2)　$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^m}$ を微分して，

$$f'(x)=\frac{e^xx^m-(e^x-1)mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$=\frac{xe^x-me^x+m}{x^{m+1}}=\frac{g(x)}{x^{m+1}}$$

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x=c$ で極小かつ最小となる。

(3)　(2)より，$a_m=\dfrac{e^c-1}{c^m}$　$(1\leqq m-1<c<m)$

すると，$\log a_m=\log(e^c-1)-m\log c<\log(e^m-1)-m\log(m-1)$

$$\log(e^m-1)=\log e^m\left(1-\frac{1}{e^m}\right)=m+\log\left(1-\frac{1}{e^m}\right)$$

$$m\log(m-1)=m\log m\left(1-\frac{1}{m}\right)=m\log m+m\log\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

よって，$\dfrac{\log a_m}{m\log m}<\dfrac{1}{\log m}+\dfrac{\log\left(1-\frac{1}{e^m}\right)}{m\log m}-1-\dfrac{\log\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\log m}\to -1$　$(m\to\infty)$

また，$\log a_m=\log(e^c-1)-m\log c>\log(e^{m-1}-1)-m\log m$

$$\log(e^{m-1}-1)=\log e^{m-1}\left(1-\frac{1}{e^{m-1}}\right)=m-1+\log\left(1-\frac{1}{e^{m-1}}\right)$$

よって，$\dfrac{\log a_m}{m\log m}>\dfrac{1}{\log m}-\dfrac{1}{m\log m}+\dfrac{\log\left(1-\frac{1}{e^{m-1}}\right)}{m\log m}-1\to -1$　$(m\to\infty)$

以上より，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m}=-1$

［解　説］

(3)の極限値は，大雑把に考えると -1 になることはつかめますが，はさみうちの原理を使ってきちんと求めようとすると，時間がかかってしまいます。

2

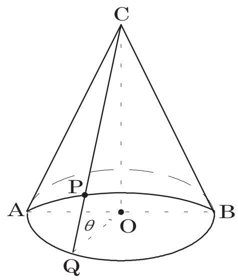
問題のページへ

(1) 母線 AC の長さは $\sqrt{1+3}=2$ となるので，側面の展開図の中心角を φ とすると，

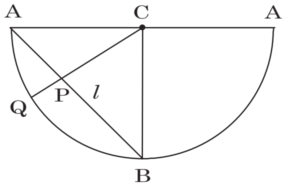
$$2\pi\cdot 1=2\pi\cdot 2\cdot\frac{\varphi}{360^\circ}$$ より，$\varphi=180^\circ$

線分 AB は底面の直径なので，$\angle ACB=90^\circ$

よって，l の長さは展開図で $AB=2\sqrt{2}$ となる。



(2) 弧 AQ の長さは，底面では $2\pi\cdot 1\cdot\frac{\theta}{360^\circ}$ であるが，側面の展開図では $2\pi\cdot 2\cdot\frac{\angle ACQ}{360^\circ}$ と表せるので，$\angle ACQ=\frac{\theta}{2}$

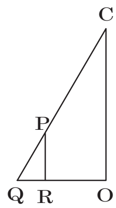


△APC に正弦定理を適用すると，$\angle CAP=45^\circ$ から，

$$\frac{CP}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\left(135^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}$$

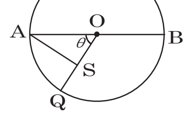
$$CP=\frac{2\sin 45^\circ}{\sin\left(135^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$$

よって，$CP^2=\dfrac{2}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{1+2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{4}{1+\sin\theta}$



(3) △COQ について考えると，$\frac{OR}{OQ}=\frac{CP}{CQ}$ から，

$$OR=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}}$$ より，$OR^2=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$



次に底面について，$OS=OA\cos\theta=\cos\theta$ より $OS^2=\cos^2\theta$

よって，$\dfrac{OS^2}{OR^2}=\cos^2\theta(1+\sin\theta)=(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ より $0<t\leqq 1$

このとき，$f(t)=(1-t^2)(1+t)$ とおくと，

$$f'(t)=-2t(1+t)+(1-t^2)$$
$$=-(3t-1)(t+1)$$

t	0	…	$\frac{1}{3}$	…	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	

$f(t)$ は $t=\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{32}{27}$ をとる。すなわち $\dfrac{OS^2}{OR^2}$ の最大値は $\frac{32}{27}$ である。

［解 説］

断面図や展開図を書かないと，位置関係がとらえきれない問題です。

3

問題のページへ

(1) 条件より，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\left\{y\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)-\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)^2\right\}\cos\theta\,d\theta=2k\pi$ ………①

まず，$\displaystyle\left\{y\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)-\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)^2\right\}\cos\theta$

$\displaystyle=\left(yx\cos\theta+\frac{1}{2}x^2y-x^2\cos^2\theta-x^3\cos\theta-\frac{1}{4}x^4\right)\cos\theta$

$\displaystyle=-x^2\cos^3\theta+(yx-x^3)\cos^2\theta+\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{4}x^4\right)\cos\theta$

ここで，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\pi$ を用いて①を変形すると，$(xy-x^3)\pi=2k\pi$

よって，$xy-x^3=2k$ ………②

(2) 曲線②と直線 $y=a$ との共有点が 1 個なので，②に $y=a$ を代入して，

$xa-x^3=2k$，$x^3-ax+2k=0$ ………③

③が実数解を 1 つだけもつ条件を求める。

ここで，③の左辺を $f(x)=x^3-ax+2k$ とおくと，$f'(x)=3x^2-a$

(i) $a\leqq 0$ のとき

$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ が単調増加となるので，0 以上の任意の k で③は実数解を 1 つだけもつ。

(ii) $a>0$ のとき

$\displaystyle f'(x)=3\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ となり，

$\displaystyle f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}+2k$

$\displaystyle f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=-\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}+2k$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗		↘		↗

$k\geqq 0$ より，$\displaystyle f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)>0$ なので，③が実数解を 1 つだけもつ条件は，

$\displaystyle f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=-\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}+2k>0$

まとめると $a^3<27k^2$ より，$0<a<3\sqrt[3]{k^2}$

(i)(ii)より，求める a の範囲は $k>0$ のとき $a<3\sqrt[3]{k^2}$，$k=0$ のとき $a\leqq 0$ となる。

［解 説］

(1)は，一見パスしたくなる問題ですが，三角関数の周期性を使えば，積分計算は簡単です。それに対して(2)では，論理の詰めに注意が必要でした。

4A

問題のページへ

(1)　$f(a)=a$ より，$1-a^2=a$，$a^2+a-1=0$

$a>0$ より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2)　$|f(x)-f(a)|=|1-x^2-(1-a^2)|=|-(x+a)(x-a)|=|x+a||x-a|$

ここで条件より，$|x+a|\geqq\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

よって，$|f(x)-f(a)|\geqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$

(3)　$x_{n+1}=f(x_n)$，$a=f(a)$ なので，$x_n\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき(2)より，

$$|x_{n+1}-a|=|f(x)-f(a)|\geqq\frac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$$

よって，$|x_n-a|\geqq|x_1-a|\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

(i)　$x_1-a\neq0$ のとき

$n\to\infty$ のとき $|x_n-a|\to\infty$ となるので，すべての n に対しては $x_n\leqq1$ が成立しない。

(ii)　$x_1-a=0$ のとき

$a=f(a)$ なので，すべての n に対して $x_n=a$ となる。

(1)より，$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq1$ なので，すべての n に対して $\dfrac{1}{2}\leqq x_n\leqq1$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x_1=a$ の場合のみ題意が成立する。

［解 説］

(2)の不等式は，(3)で定義された数列の発散条件に対応することがわかります。これを(3)の題意に結びつけることがポイントです。

4B

問題のページへ

まず，$\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=\dfrac{4b^2-5ab+a^2}{4}=\dfrac{(4b-a)(b-a)}{4}$

$0<a<b$ なので，$\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2>0$

よって，$\dfrac{a+2b}{3}>\sqrt{ab}$ ………①

また，
$$\left(\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3-\left(\frac{a+2b}{3}\right)^3=\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}-\frac{(a+2b)^3}{27}$$
$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{27}$$
$$=\frac{(b-a)^3}{27}$$

$0<a<b$ なので，$\left(\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3-\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^3>0$

よって，$\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}>\dfrac{a+2b}{3}$ ………②

①②より，$\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}>\dfrac{a+2b}{3}>\sqrt{ab}$

［解　説］

解に必要なスペースからもわかるように，3 題の選択題のなかでは，他の 2 題と比べてかなり易しくなっています。なお，上の解には書いていませんが，まず $a=1$，$b=4$ として各式の値を計算し，大小関係を予測して解いています。

4C

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$より，直線 OA $:a_2x-a_1y=0$と表せるので，$B=\left|a_2p_1-a_1p_2\right|$，$C=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$とすると，点 P と直線 OA の距離$D$は$D=\dfrac{B}{C}$となる。

```
10　DIM　A(2), P(2)
20　INPUT　A(1), A(2)
30　INPUT　P(1), P(2)
40　B＝ABS(A(2)＊P(1)－A(1)＊P(2))
50　C＝SQR(A(1)^2＋A(2)^2)
60　D＝B / C : PRINT　D
70　END
```

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$より直線 AB $:(a_2-b_2)(x-a_1)-(a_1-b_1)(y-a_2)=0$

$C=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$，$D=(a_2-b_2)(p_1-a_1)-(a_1-b_1)(p_2-a_2)$，

$E=(a_2-b_2)(q_1-a_1)-(a_1-b_1)(q_2-a_2)$とおくと，点 P，点 Q と直線 AB の距離は，それぞれ$\dfrac{|D|}{C}$，$\dfrac{|E|}{C}$なので，$\dfrac{|D|}{C}<0.00001$または$\dfrac{|E|}{C}<0.00001$のときは，0 を表示する。この場合以外については，$D\cdot E>0$のときは P と Q が直線 AB の同じ側にあるので 1 を表示，そうでなければ-1を表示する。

```
10　DIM　A(2), B(2), P(2), Q(2)
20　EPS = 0.00001
30　INPUT　A(1), A(2)
40　INPUT　B(1), B(2)
50　INPUT　P(1), P(2)
60　INPUT　Q(1), Q(2)
70　C＝SQR((A(1)－B(1))^2＋(A(2)－B(2))^2)
80　D＝(A(2)－B(2))＊(P(1)－A(1))－(A(1)－B(1))＊(P(2)－A(2))
90　E＝(A(2)－B(2))＊(Q(1)－A(1))－(A(1)－B(1))＊(Q(2)－A(2))
100　IF　ABS(D) / C＜EPS　THEN　PRINT　"0" : GOTO　130
110　IF　ABS(E) / C＜EPS　THEN　PRINT　"0" : GOTO　130
120　IF　D＊E＞0　THEN　PRINT　"1"　ELSE　PRINT　"−1"
130　END
```

［解 説］

(2)ではさまざまなプログラムが考えられ，採点がたいへんでしょう。

$\boxed{5D}$

問題のページへ

(1)　5 枚のカードの並べ方は$5!$通りある。5 枚のカードで 2 枚だけ数字が一致するのは，そのカードの選び方が${}_5\mathrm{C}_2$通りで，残りの 3 枚が一致しない場合が，その数字を a，b，c とすると，右図のように 2 通りある。

a	b	c		a	b	c
b	c	a		c	a	b

よって，$P(X=2)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\times 2}{5!}=\dfrac{1}{6}$

(2)　$a_kP(X=k)$は 1 を含めて k 枚の数字が一致する確率を表し，その確率を$k=1$の場合から$k=n$の場合まで加えると，数字 1 のカードが一致する確率 p となる。また，$P(X=k)$はk枚の数字が一致する確率である。

したがって，a_kはk枚の数字が一致する条件のもとで，そのk枚の中の 1 枚が 1 である確率を意味する。すると，k枚のカードの数字の選び方が${}_n\mathrm{C}_k$通り，1 以外の数字の選び方が${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$通りとなるので，

$$a_k=\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}{{}_n\mathrm{C}_k}=\frac{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}=\frac{k}{n}$$

(3)　$E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)$であり，(2)より$k=na_k$なので，

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}na_kP(X=k)=np$$

ここで，数字 1 が一致する確率は，$p=\dfrac{1}{n}$より，

$$E(X)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

［解 説］

(2)が(3)のうまい誘導となっていて，おもしろい問題です。なお，解のポイントとなる(2)では，a_kの意味がすぐにはつかめませんでしたので，こんなときはいつものように$k=1$，2，3，…と具体的に考えていきました。そうすると思考がまとまりました。

$\boxed{5E}$ 問題のページへ

(1)　$x^2+2kx+3k=0$ ……①の 2 つの解が α，β $(\alpha\neq\beta)$ なので，

$$\alpha+\beta=-2k,\ \ \alpha\beta=3k\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，①の判別式 $D/4=k^2-3k=k(k-3)$

(i)　$D/4>0$　$(k<0,\ 3<k)$ のとき

$$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2$$

②より，$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=4k^2-6k+2$

(ii)　$D/4<0$　$(0<k<3)$ のとき

①の解は α，$\overline{\alpha}$ となるので，②は $\alpha+\overline{\alpha}=-2k$，$\alpha\overline{\alpha}=3k$ ……… ②′

$$\begin{aligned}|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2&=(\alpha-i)(\overline{\alpha}-\overline{i})+(\overline{\alpha}-i)(\alpha-\overline{i})\\&=(\alpha-i)(\overline{\alpha}+i)+(\overline{\alpha}-i)(\alpha+i)\\&=2\alpha\overline{\alpha}+2\end{aligned}$$

②′ より，$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=6k+2$

(2)　$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ のとき，三平方の定理より，

$$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=|\alpha-\beta|^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$D/4>0$　$(k<0,\ 3<k)$ のとき

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4k^2-12k$$

③より，$4k^2-6k+2=4k^2-12k$

$k=-\dfrac{1}{3}$（この値は $k<0$，$3<k$ を満たす）

(ii)　$D/4<0$　$(0<k<3)$ のとき

$$|\alpha-\overline{\alpha}|^2=(\alpha-\overline{\alpha})(\overline{\alpha}-\alpha)=2\alpha\overline{\alpha}-\left\{(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}\right\}=12k-4k^2$$

③より，$6k+2=12k-4k^2$，$2k^2-3k+1=0$

$k=1,\ \dfrac{1}{2}$（この値は $0<k<3$ を満たす）

(i)(ii)より，$k=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ 1$

［解 説］

複素数に関する頻出問題の一つです。要点は，2 次方程式①が実数解をもつときと虚数解をもつときとを場合分けすることです。

5F

問題のページへ

(1)　条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{d}=1$より，$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=1$なので，$x-\dfrac{1}{2}y=1$………①

$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$より，$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0$なので，$-\dfrac{1}{2}x+y-\dfrac{1}{2}z=0$………②

$\vec{c}\cdot\vec{d}=0$より，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0$なので，$-\dfrac{1}{2}y+z=0$………③

①②③より，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

また，$\vec{f}=u\vec{a}+v\vec{b}+w\vec{c}$ とおいて同様にすると，$\vec{a}\cdot\vec{f}=0$ より $u-\dfrac{1}{2}v=0$，$\vec{b}\cdot\vec{f}=0$より$-\dfrac{1}{2}u+v-\dfrac{1}{2}w=0$，$\vec{c}\cdot\vec{f}=1$より$-\dfrac{1}{2}v+w=1$

よって，$(u,\ v,\ w)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$から，$\vec{f}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

(2)　(1)より，$|\vec{d}|^2=\left|\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right|^2=\dfrac{9}{4}+1+\dfrac{1}{4}+2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

$|\vec{f}|^2=\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}\right|^2=\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{9}{4}+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

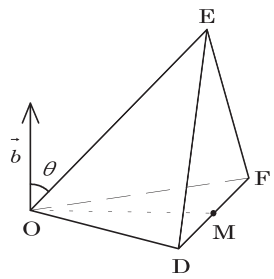
よって，$|\vec{d}|=|\vec{f}|=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

また，$\vec{d}-\vec{f}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}-\dfrac{3}{2}\vec{c}=\vec{a}-\vec{c}$

$|\vec{d}-\vec{f}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=1-2\cdot0+1=2$なので，$|\vec{d}-\vec{f}|=\sqrt{2}$

(3)　$\triangle$ODF はOD = OF = $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$の二等辺三角形より，底辺DF = $\sqrt{2}$ の中点を M とおくと，OM = $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$となる。

よって，$\triangle$ODF $=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



(4)　$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{f}=0$より，$\vec{b}$は平面 ODF に垂直である。

ここで，$\vec{b}$と$\vec{e}$のなす角をθとおくと，$\vec{b}\cdot\vec{e}=1$，$|\vec{b}|=1$から，$|\vec{e}|\cos\theta=1$となる。

これは，$\triangle$ODF を底面とするとき，四面体 ODEF の高さが 1 であることを表すので，体積は$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot1=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$となる。

［解 説］

(4)では，$\vec{b}$が平面 ODF の法線ベクトルであるのに注目して解きました。