1　　解答解説のページへ

$\angle A = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle B = \alpha$ である$\triangle$ABC を考える。$\triangle$ABC の外接円の半径を R とする。この外接円上の点 P が，点 A を含まない弧 BC 上を動くものとする。$\angle BAP = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle$ABP の面積の最大値を R，α を用いて表せ。

(2)　$\triangle$BPC の面積を R，θ を用いて表せ。

(3)　$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ とする。$\triangle$ABP と$\triangle$BPC の面積の和 S の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

a, b を $a>b>0$ を満たす定数とし,

$$a_1 = a\,,\ \ a_{n+1} = a_n{}^2 + b_n{}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_1 = b\,,\ \ b_{n+1} = 2a_n b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$を考える。次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{c_n\}$を $c_n = a_n + b_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定義するとき, その一般項 c_n を a, b を用いて表せ。

(2) 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項 a_n, b_n を a, b を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ が存在するかどうかを調べ, 存在する場合はその値を求めよ。

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき, $a + b < 1$ が成り立つことを証明せよ。

3

解答解説のページへ

xyz 空間において，底面の半径が 2，高さが 4 である直円柱 $x^2+y^2\leqq 4$，$0\leqq z\leqq 4$ を考える。この円柱内で，さらに $z\leqq (x-2)^2$，$z\leqq y^2$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ からなる立体を V とする。次の問いに答えよ。

(1)　立体 V を平面 $x=t\ (-2\leqq t\leqq 2)$ で切った切り口の面積を $A(t)$ とする。$A(t)$ を t を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

4 次方程式の解について，次の問いに答えよ。ただし，下のことは既知としてよい。

自然数 $k,\ l,\ m$ が次の条件

(イ)　k と l は 1 以外の公約数をもたない　　(ロ)　k は lm の約数である

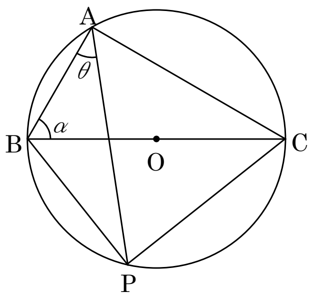
を満たすならば, k は m の約数である。

(1)　$a,\ b,\ c,\ d$ は整数で，$d \neq 0$ とする。方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は自然数であり，かつ $|d|$ の約数に限ることを証明せよ。

(2)　方程式 $2x^4-2x-1=0$ の実数解はすべて無理数であることを証明せよ。

1

問題のページへ



(1)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ より，△ABC の外接円の中心を O とすると，点 O は辺 BC の中点であり，$\mathrm{BC}=2R$ となる。

まず，$\angle\mathrm{ABC}=\alpha$ から，$\mathrm{AB}=2R\cos\alpha$

また，$\angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{PAC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$\mathrm{BP}=2R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\sin\theta$$

さらに，$\angle\mathrm{ABP}=\alpha+\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BP}\sin\angle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\theta\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=2R^2\cos\alpha\sin\theta\cos(\theta-\alpha)=2R^2\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}$$
$$=R^2\cos\alpha\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}$$

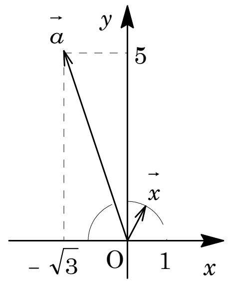
ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\alpha<2\theta-\alpha<\pi-\alpha$ であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から $2\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ となる θ が存在する。すると，この θ において $\sin(2\theta-\alpha)=1$ となり，△ABP の面積は最大値 $R^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$ をとる。

(2)　$\mathrm{CP}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\cos\theta$ より，

$$\triangle\mathrm{BPC}=\frac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta=2R^2\sin\theta\cos\theta=R^2\sin 2\theta$$

(3)　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ のとき, (1)より，$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ となり，

$$S=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{BCP}=\frac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin 2\theta\right\}$$
$$=\frac{1}{4}R^2(\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}+4\sin 2\theta)$$
$$=\frac{1}{4}R^2(-\sqrt{3}\cos 2\theta+5\sin 2\theta+\sqrt{3})$$



ここで，$\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 5)$，$\vec{x}=(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ とおくと，

$$S=\frac{1}{4}R^2(\vec{a}\cdot\vec{x}+\sqrt{3})$$

ここで，$0<2\theta<\pi$ から，$\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値が最大となるのは，$\vec{x}$ が $\vec{a}$ と同じ向きになるときであり，このとき $\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値は $|\vec{a}|\cdot|\vec{x}|=2\sqrt{7}$ である。

よって, S の最大値は，$\dfrac{1}{4}(2\sqrt{7}+\sqrt{3})R^2$ である。

［解 説］

(1)の結論は図からストレートに導けますが, (3)も考えて数式処理をしました。

2

問題のページへ

(1) 条件より，$a_1 = a$，$a_{n+1} = a_n{}^2 + b_n{}^2$ ……①，$b_1 = b$，$b_{n+1} = 2a_nb_n$ ……②

①②より，$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n{}^2 + b_n{}^2 + 2a_nb_n = (a_n + b_n)^2$ となり，$c_n = a_n + b_n$ から，

$$c_{n+1} = c_n{}^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで, $a > b > 0$ から $c_1 > 0$ となり，③から帰納的に $c_n > 0$ である。

③より，$a + b \neq 1$ のとき，$\log_{a+b} c_{n+1} = \log_{a+b} c_n{}^2 = 2\log_{a+b} c_n$

$$\log_{a+b} c_n = 2^{n-1}\log_{a+b}(a+b) = 2^{n-1}$$

よって，$c_n = (a+b)^{2^{n-1}}$ ……④となり，この式は $a+b=1$ のときも成立する。

(2) (1)と同様にして，$d_n = a_n - b_n$ とおくと，①②より，$d_{n+1} = d_n{}^2$ ………⑤

ここで, $a > b > 0$ から $d_1 > 0$ となり，⑤から帰納的に $d_n > 0$ である。

⑤より，$a - b \neq 1$ のとき，$\log_{a-b} d_{n+1} = \log_{a-b} d_n{}^2 = 2\log_{a-b} d_n$

$$\log_{a-b} d_n = 2^{n-1}\log_{a-b}(a-b) = 2^{n-1}$$

よって，$d_n = (a-b)^{2^{n-1}}$ ……⑥となり，この式は $a-b=1$ のときも成立する。

④⑥より，$a_n = \frac{1}{2}(c_n + d_n) = \frac{1}{2}\left\{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}\right\}$

$$b_n = \frac{1}{2}(c_n - d_n) = \frac{1}{2}\left\{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}\right\}$$

(3) (2)より，$\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}}{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}} = \dfrac{1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}$

ここで，$a + b > a - b > 0$ から $0 < \dfrac{a-b}{a+b} < 1$ となり，$\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}} \to 0\ (n \to \infty)$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1$$

(4) まず，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。

ここで, (2)より，$a_n = \dfrac{1}{2}(a+b)^{2^{n-1}}\left\{1 + \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}\right\}$ と変形し, (3)と同様に考えると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる条件は, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a+b)^{2^{n-1}} = 0$，すなわち $a + b < 1$ である。

［解 説］

誘導付きで漸化式を解く問題です。後半の極限の処理も基本的です。

３　問題のページへ

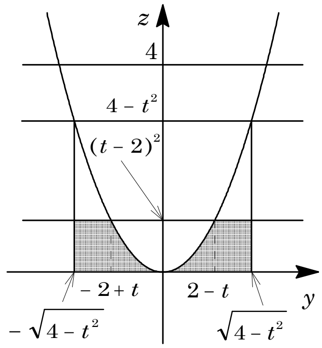
(1)　$x^2+y^2 \leqq 4$ ……①，$0 \leqq z \leqq 4$ ……②，$z \leqq (x-2)^2$ ……③，$z \leqq y^2$ ……④で表される立体 V を平面 $x=t$ $(-2 \leqq t \leqq 2)$ で切った切り口は,

①より，$t^2+y^2 \leqq 4$，$-\sqrt{4-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{4-t^2}$ ………⑤

③より，$z \leqq (t-2)^2$ ………⑥

(i)　$0 \leqq t \leqq 2$ のとき

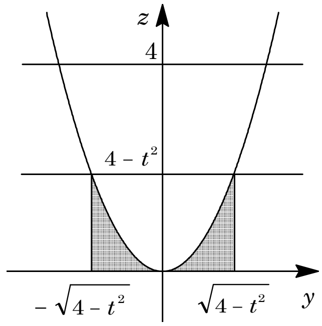
$(t-2)^2 \leqq 4-t^2 \leqq 4$ より，②④⑤⑥で表される切り口を $x=t$ 上に図示すると，右図の網点部となる。この面積 $A(t)$ は,



$$A(t)=2\int_0^{2-t} y^2dy+2(\sqrt{4-t^2}-2+t)(t-2)^2$$
$$=\frac{2}{3}(2-t)^3+2(\sqrt{4-t^2}-2+t)(t-2)^2$$
$$=2(t-2)^2\sqrt{4-t^2}+\frac{4}{3}(t-2)^3$$

(ii)　$-2 \leqq t \leqq 0$ のとき

$4-t^2 \leqq 4 \leqq (t-2)^2$ より，②④⑤⑥で表される切り口を $x=t$ 上に図示すると，右図の網点部となる。この面積 $A(t)$ は,



$$A(t)=2\int_0^{\sqrt{4-t^2}} y^2dy$$
$$=\frac{2}{3}(\sqrt{4-t^2})^3$$

(2)　立体 V の体積を W とし,

$$I_1=\int_0^2 2(t-2)^2\sqrt{4-t^2}\,dt,\ I_2=\int_0^2\frac{4}{3}(t-2)^3dt,\ I_3=\int_{-2}^0\frac{2}{3}(\sqrt{4-t^2})^3dt$$

すると，(1)より，$W=I_1+I_2+I_3$ である。

まず，I_1 に対して,

$$I_1=2\int_0^2 t^2\sqrt{4-t^2}\,dt-4\int_0^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt+8\int_0^2\sqrt{4-t^2}\,dt$$

ここで，$t=2\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$\int_0^2 t^2\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos 4\theta)\,d\theta=\pi$$

また，$4-t^2=s$ とおくと,

$$\int_0^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_4^0\sqrt{s}\,(-ds)=\Big[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4=\frac{16}{3}$$

よって，$\int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt = \pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{4} = \pi$ から，$I_1 = 2\pi - 4\cdot\frac{16}{3} + 8\pi = 10\pi - \frac{64}{3}$

次に，$I_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\Big[(t-2)^4\Big]_0^2 = -\frac{16}{3}$

さらに，$t = 2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$，その後，$\varphi = -\theta$ とおくと，

$$I_3 = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 8\cos^3\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta = \frac{32}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{32}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

以上より，立体 V の体積 W は,

$$W = 10\pi - \frac{64}{3} - \frac{16}{3} + 2\pi = 12\pi - \frac{80}{3}$$

［解　説］

共通部分の体積を求める問題です。(1)の場合分けについては，$(t-2)^2$，$4-t^2$，4 の大小関係をもとにしています。省略しましたが，グラフを書いて判断しています。なお，(2)の計算は半端なものではなく，省エネのため，I_3 では，漸化式を利用して得られる公式を利用しています。

4

問題のページへ

(1)　方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(d\neq 0)$ ……①が，有理数の解 $r=\dfrac{q}{p}$ （$p>0$, $q\neq 0$, p と q は互いに素である整数）をもつことより，

$$\frac{q^4}{p^4}+a\cdot\frac{q^3}{p^3}+b\cdot\frac{q^2}{p^2}+c\cdot\frac{q}{p}+d=0,\ \ q^4+apq^3+bp^2q^2+cp^3q+dp^4=0$$

すると，$q^4=-p(aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3)$ から，

$$|q|^4=|p|\cdot|aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3|\cdots\cdots\cdots②$$

条件から，$|p|$ と $|q|^4$ は 1 以外の公約数をもたず，しかも②から，$|p|$ は $|q|^4\times 1$ の約数なので，$|p|$ は 1 の約数，すなわち $|p|=1$ である。

このとき，$|r|=\dfrac{|q|}{|p|}=|q|$ から，$|r|$ は自然数となる。

そこで，方程式①は整数解 r をもつことになり，$r^4+ar^3+br^2+cr+d=0$

$$d=-r(r^3+ar^2+br+c),\ \ |d|=|r|\cdot|r^3+ar^2+br+c|$$

よって，$|r|$ は $|d|$ の約数である。

(2)　方程式 $2x^4-2x-1=0$ ……③に対して，$2x=t$ とおくと，

$$\frac{t^4}{8}-t-1=0,\ \ t^4-8t-8=0\cdots\cdots\cdots④$$

さて，方程式④が有理数の解をもつと仮定すると，(1)から，その解は整数で，しかも 8 の約数である。ここで，$f(t)=t^4-8t-8$ とおくと，

$$f(1)=-15,\ f(-1)=1,\ f(2)=-8,\ f(-2)=24$$

$$f(4)=216,\ f(-4)=280,\ f(8)=4024,\ f(-8)=4152$$

これより，方程式④は有理数の解をもたず，実数解はすべて無理数である。

よって，方程式③の実数解はすべて無理数である。

［解　説］

(1)は有名問題ですが，経験がないと難しいでしょう。(2)はその応用で，最高次の係数を 1 にすれば解決です。定数項に注目して逆数をとるという手もあります。