1

解答解説のページへ

3 辺の長さが AB $=4$，BC $=3$，CA $=5$ である直角三角形 ABC と，その内側にあって 2 辺 AB および AC に接する円 O を考える。この円の半径を r とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB との交点を H とする。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクトルを，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{u}$ $(t>0)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 AO と辺 BC の交点を M とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ の内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HO}}$ を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ および t を用いて表せ。また，円 O の半径 r を t で表せ。

(3)　円 O が辺 BC にも接するとき，その中心を I とする。すなわち，I は三角形 ABC の内心である。そのときの t の値と，内接円 I の半径を求めよ。

(4)　円 O と内接円 I が共有点をもたないような t の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 関係式 $a_1=1$，$na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい。$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおいて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，a_n を求めよ。

(2) $x\neq 1$ のとき，等比数列の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}$ の両辺を x で微分せよ。その結果を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kx^k$ を求めよ。

(3) $p\neq 1$ のとき，関係式 $c_1=0$，$\dfrac{pc_{n+1}}{n}-\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

円 $C_1 : x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$ と放物線 $C_2 : y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C_1 と座標軸との共有点，および C_2 と座標軸との共有点の座標を求めよ。

(2)　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3 \leqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1 \end{cases}$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。D の面積 S を求めよ。

(3)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値を求めよ。

4　　解答解説のページへ

曲線 $y=\log x$ の接線はつねにこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ。以下，k は自然数とする。

(1)　点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする。また，$k\geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする。四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ。

(2)　次の 2 つの値の大小を比較せよ。

(ア)　$\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$　(ただし，$k\geqq 2$)

(イ)　$\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1}\log x\,dx$　(ただし，$k\geqq 1$)

(3)　$a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$$

(4)　2 以上の自然数 n について

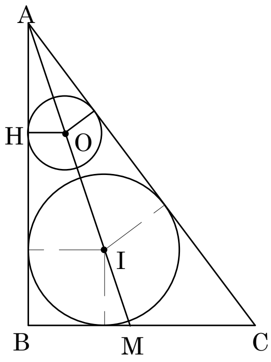
$$U_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right),\ \ V_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

とおくとき，次の不等式を示せ。

$$U_n<\log(n!)<V_n$$

1

問題のページへ



(1)　$\angle$BAC の二等分線 AM は，$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$ より，k を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=k(\vec{u}+\vec{v})=\frac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{k}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また, M は BC 上の点なので，$\dfrac{k}{4}+\dfrac{k}{5}=1$，$k=\dfrac{20}{9}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})=\dfrac{20}{9}\vec{u}+\dfrac{20}{9}\vec{v}$

(2)　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{4}{5}$ より，$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times1\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}$

ここで，AO : AM = AH : AB = t : 4 より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{t}{4}\cdot\frac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{5}{9}t(\vec{u}+\vec{v})\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{HO}}=\dfrac{5}{9}t(\vec{u}+\vec{v})-t\vec{u}=-\dfrac{4}{9}t\vec{u}+\dfrac{5}{9}t\vec{v}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{HO}}|^2=\left(\frac{t}{9}\right)^2|-4\vec{u}+5\vec{v}|^2=\left(\frac{t}{9}\right)^2\left(16-40\times\frac{4}{5}+25\right)=\frac{t^2}{9}$$

すると，$t>0$ から，$r=|\overrightarrow{\mathrm{HO}}|=\sqrt{\dfrac{t^2}{9}}=\dfrac{t}{3}$

(3)　内接円の半径を r とおくと，$(3-r)+(4-r)=5$ より，$r=1$ となる。

すると, (2)から，$\dfrac{t}{3}=1$ となり，$t=3$ である。

(4)　$(*)$から，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{5}{9}\times3(\vec{u}+\vec{v})=\dfrac{5}{3}(\vec{u}+\vec{v})$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{9}t\right)(\vec{u}+\vec{v})$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2=\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{9}t\right)^2|\vec{u}+\vec{v}|^2=\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{9}t\right)^2\left(1+2\times\frac{4}{5}+1\right)=\frac{10}{9}(3-t)^2$$

すると，$t<3$ なので，$\mathrm{OI}=\dfrac{\sqrt{3}}{10}(3-t)$ となる。

これより，円 O と内接円 I が共有点をもたない条件は,

$$\frac{\sqrt{10}}{3}(3-t)>\frac{t}{3}+1,\ (\sqrt{10}+1)t<3\sqrt{10}-3,\ t<\frac{3(\sqrt{10}-1)}{\sqrt{10}+1}=\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$$

よって，$t>0$ と合わせて，$0<t<\dfrac{11-2\sqrt{10}}{3}$ である。

［解 説］

丁寧な誘導のついた平面ベクトルの問題です。ただ, (3)はあまりにも有名なので, 誘導とは異なる解法になっています。

2

問題のページへ

(1)　$na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ より，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$ となり，$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと，

$$b_1=\frac{a_1}{1}=1,\ b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

$n\geqq 2$ のとき，$b_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$

よって，$a_n=nb_n=2n-1$ となる。なお，この式は，$n=1$ でも成立している。

(2)　$x\neq 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}$ の両辺を x で微分すると，

$$\sum_{k=1}^{n-1}kx^{k-1}=\frac{nx^{n-1}(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}=\frac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$$

両辺に x をかけると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kx^k=\frac{(n-1)x^{n+1}-nx^n+x}{(x-1)^2}$

(3)　$\dfrac{pc_{n+1}}{n}-\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ より，$p(n+1)c_{n+1}-nc_n=n$ となり，$d_n=nc_n$ とおくと，

$$pd_{n+1}-d_n=n,\ p^{n+1}d_{n+1}-p^nd_n=np^n$$

さらに，$e_n=p^nd_n$ とおくと，$e_1=p^1d_1=p\cdot 1\cdot c_1=0$ で，

$$e_{n+1}-e_n=np^n$$

$n\geqq 2$ のとき，$e_n=0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kp^k=\frac{(n-1)p^{n+1}-np^n+p}{(p-1)^2}$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(i)　$p\neq 0$ のとき

$$c_n=\frac{d_n}{n}=\frac{e_n}{np^n}=\frac{(n-1)p^{n+1}-np^n+p}{np^n(p-1)^2}=\frac{(n-1)p^n-np^{n-1}+1}{np^{n-1}(p-1)^2}$$

(ii)　$p=0$ のとき

$-\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ より，$c_n=-1$ となるが，$c_1=0$ に反する。

(i)(ii)より，$p\neq 0$，$p\neq 1$ のとき，$c_n=\dfrac{(n-1)p^n-np^{n-1}+1}{np^{n-1}(p-1)^2}$ である。

［解　説］

(3)の数列 $\{d_n\}$ についての漸化式は，解法がいろいろありますが，(2)の結論を誘導と考えると，上に記した解答例になるでしょう。

3　問題のページへ

(1)　まず，$C_1 : x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$ に対して，$y=0$ とすると，

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0,\ (x-\sqrt{3})^2=0,\ x=\sqrt{3}$$

また，$x=0$ とすると，$y^2-4y+3=0$，$y=1,\ 3$ となり，C_1 と座標軸の共有点は，

$$(\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 3)$$

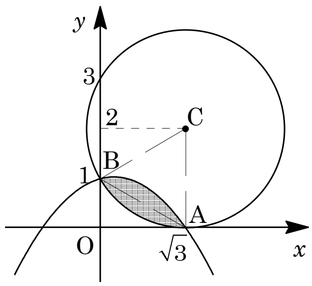
$C_2 : y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ ……(∗)に対して，$y=0$ とすると，

$$\sqrt{3}x^2-x-2\sqrt{3}=0,\ (\sqrt{3}x+2)(x-\sqrt{3})=0,\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}$$

また，$x=0$ とすると，$y=1$ となり，C_2 と座標軸の共有点は，

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right),\ (\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1)$$

(2)　$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3\leqq 0$，$y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ の表す領域 D は，右図の網点部となる。



そこで，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，また C_1 の中心を $\mathrm{C}(\sqrt{3},\ 2)$ とおく。さらに，領域 D の線分 AB の下側の部分の面積を S_1，上側の部分の面積を S_2 とする。

さて，$\mathrm{CA}=\mathrm{CB}=\mathrm{AB}=2$ から，△ABC は正三角形となり，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$$

また，直線 $\mathrm{AB} : y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$ であるので，

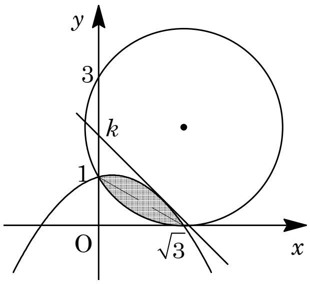
$$S_2=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1+\frac{1}{\sqrt{3}}x-1\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\sqrt{3})^3=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

すると，領域 D の面積 S は，

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{3}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(3)　$x+y=k$ とおくと，右図から，直線 $y=-x+k$ が C_2 に接するとき k は最大値をとる。



さて，(∗)より，$y'=-x+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ となり，$y'=-1$ から，

$$-x+\frac{1}{2\sqrt{3}}=-1,\ x=\frac{1}{2\sqrt{3}}+1=\frac{\sqrt{3}}{6}+1$$

(∗)を $y=-\dfrac{1}{2}x\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+1$ と変形して代入すると，

$$y=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{6}+1\Big)\Big(-\frac{\sqrt{3}}{6}+1\Big)+1=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{12}+1\Big)+1=\frac{13}{24}$$

よって，$x+y$ は $(x,\ y)=\Big(\frac{\sqrt{3}}{6}+1,\ \frac{13}{24}\Big)$ において最大となり，その最大値は,

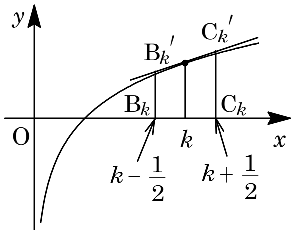
$$\frac{\sqrt{3}}{6}+1+\frac{13}{24}=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{37}{24}$$

［解　説］

内容は基本的ですが，計算量のある問題です。特に(3)では，図を雑にかくと調べることが増えてきます。

4

問題のページへ



(1)　$y=\log x$ に対して $y'=\dfrac{1}{x}$ となり，点 $A_k{}'(k,\ \log k)$ における接線 l_k の方程式は,

$$y-\log k=\frac{1}{k}(x-k),\quad y=\frac{1}{k}x-1+\log k$$

$x=k\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，複号同順で

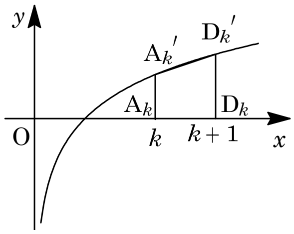
$$y=\frac{1}{k}\left(k\pm\frac{1}{2}\right)-1+\log k=\pm\frac{1}{2k}+\log k$$

よって，$B_k{}'\left(k-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2k}+\log k\right)$，$C_k{}'\left(k+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2k}+\log k\right)$となる。

以上より，四角形 $B_kC_kC_k{}'B_k{}'$ の面積 S_k は,

$$S_k=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k}+\log k+\frac{1}{2k}+\log k\right)\times 1=\log k$$

(2)　$k\geqq 2$ のとき，$S_k>\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ なので, (1)より，$\log k>\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ ………①



$k\geqq 1$ のとき，$D_k(k+1,\ 0)$，$D_k{}'(k+1,\ \log(k+1))$ とおくと，四角形 $A_kD_kD_k{}'A_k{}'$ の面積は,

$$\frac{1}{2}\left\{\log k+\log(k+1)\right\}\times 1=\frac{\log k+\log(k+1)}{2}$$

さて，曲線 $y=\log x$ は上に凸であるので,

$$\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\int_k^{k+1}\log x\,dx\ \text{………②}$$

(3)　$n\geqq 2$ のとき，まず，①より，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\log k>\sum_{k=2}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ となり,

$$\log 2+\log 3+\cdots+\log n=\log(n!)>\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx$$

両辺から $\dfrac{1}{2}\log n$ を引いて,

$$a_n=\log(n!)-\frac{1}{2}\log n>\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n$$

ここで，$y=\log x$ は増加関数なので，$\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx>\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log n\,dx=\frac{1}{2}\log n$

よって，$\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n>0$ から，$a_n>\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx$ ………③

また，②より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log x\,dx$ となり,

$$\frac{\log 1+\log 2}{2}+\cdots+\frac{\log(n-1)+\log n}{2}=\sum_{k=2}^{n}\log k-\frac{1}{2}\log n<\int_1^n \log x\,dx$$

よって，$a_n=\log(n!)-\frac{1}{2}\log n=\sum_{k=2}^{n}\log k-\frac{1}{2}\log n<\int_1^n \log x\,dx$ ………④

③④より，$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_1^n \log x\,dx$ ………⑤

(4)　⑤より，$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n<\log(n!)<\int_1^n \log x\,dx+\frac{1}{2}\log n$ となり，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n&=\left[\,x\log x-x\,\right]_{\frac{3}{2}}^{n}+\frac{1}{2}\log n\\&=n\log n-\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}-n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log n\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)=U_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^n\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n&=\left[\,x\log x-x\,\right]_1^n+\frac{1}{2}\log n=n\log n-n+1+\frac{1}{2}\log n\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1=V_n\end{aligned}$$

以上より，$U_n<\log(n!)<V_n$ が成立する。

［解　説］

凸関数の性質を利用した不等式の証明問題です。誘導が非常に丁寧です。