**1**

解答解説のページへ

四面体 OABC において,

$$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=3,\ \mathrm{OC}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ,\ \angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$$

とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 平面 ABC 上に点 H をとり, $s$, $t$, $u$ を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおく。このとき, $s+t+u=1$ となることを示せ。

(2) (1)の $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直であるとき, $s$, $t$, $u$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) 平面 OAB 上に点 K をとり, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直であるとする。このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表し, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$I_1=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$ とする。$x=\tan\theta$ とおくことにより，$I_1=\dfrac{\pi}{3}$ を示せ。

(2)　(1)の $I_1$ を部分積分して，$I_1$ と $I_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の関係式を導き，$I_2$ の値を求めよ。

(3)　$t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。

(4)　合成関数の微分法を用いて，関数 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ。

(5)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$ を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

原点 O を中心とし，半径 1 の円を $C$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 $C$ に 2 本の接線を引き，その接点を M，N とする。直線 OP と弦 MN の交点を Q とする。点 Q の座標を $t$ を用いて表せ。ただし，$t$ は実数とする。

(2) 点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

**4**

解答解説のページへ

実数 $x, y$ が連立不等式

$$10^{10} < 2^x 3^y < 10^{11} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}),\ \ 10^9 < 3^x 2^y < 10^{10} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

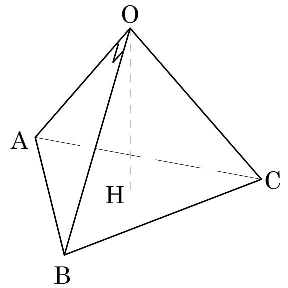
(1) 連立不等式(A), (B)が表す $xy$ 平面上の領域は，どのような図形であるか答えよ。また，その理由を述べよ。

(2) 連立不等式(A), (B)が満たす実数 $x$, $y$ において，$x+y$ がとりうる値の範囲，および $y-x$ がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(3) 連立不等式(A), (B)が満たす整数 $x$, $y$ を考える。このとき，$y-x$ が最大になる整数 $x$, $y$ を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい。

**1**

問題のページへ




(1) 点 H が平面 ABC 上にあることより, $x$, $y$ を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+y(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$=(1-x-y)\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}$$

条件より, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ なので, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次独立であることから,

$$s=1-x-y,\ t=x,\ u=y$$

よって, $s+t+u=1$ ………①

(2) 条件より, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3\cdot\cos90^\circ=0$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\cdot2\cdot\cos120^\circ=-3,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot1\cdot\cos120^\circ=-1$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直なので, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\ s-9t+2u=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0,\ 2s+3t-5u=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $t=\dfrac{3}{7}u$, $s=\dfrac{13}{7}u$ となり, ①に代入すると,

$$\frac{13}{7}u+\frac{3}{7}u+u=1,\ \frac{23}{7}u=1$$

よって, $u=\dfrac{7}{23}$, $t=\dfrac{3}{23}$, $s=\dfrac{13}{23}$

(3) 点 K は平面 OAB 上にあるので, $l$, $m$ を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=l\vec{a}+m\vec{b}$ と表せ,

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}=l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直なので, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CK}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}\cdot\vec{a}=(l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0,\ l+1=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}\cdot\vec{b}=(l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0,\ 9m+3=0$$

すると, $l=-1$, $m=-\dfrac{1}{3}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=-\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}=-\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり,

$$|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|^2=|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}=2$$

よって, $|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|=\sqrt{2}$ から, 四面体 OABC の体積 $V$ は,

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

［解　説］

空間ベクトルの基本的な問題です。ただ, (2)と(3)は独立の設問です。

**2**

問題のページへ

(1)　$x=\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，$x=0\to\sqrt{3}$ のとき $\theta=0\to\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$I_1=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}$$

(2)　$$I_1=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\Big[\,x\cdot\frac{1}{x^2+1}\Big]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x\cdot\frac{-2x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+2I_1-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}+2I_1-2I_2$$

よって，$I_2=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{2}I_1=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\pi}{6}$

(3)　$t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくと，$dt=\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

これより，$\dfrac{dt}{t}=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ となり，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

(4)　$y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ に対して，

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(5)　$$P=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right\}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

すると, (3)の結果を用いて,

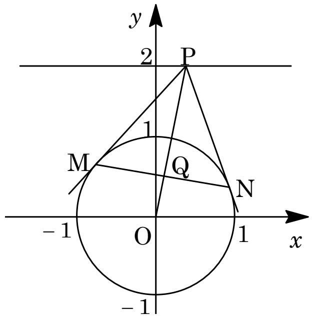
$$P=\Big[\log(x+\sqrt{x^2+1})\Big]_0^1=\log(1+\sqrt{2})$$

［解　説］

微積分の計算問題です。ただ，設問(4)の意味は不明です。

**3**

問題のページへ




(1)　円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ における接線の方程式は，それぞれ

$$x_1x+y_1y=1,\quad x_2x+y_2y=1$$

ともに点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ を通ることより，

$$tx_1+2y_1=1\cdots\cdots\cdots①,\quad tx_2+2y_2=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，方程式 $tx+2y=1\cdots\cdots③$ で表される図形を考えると，これは直線を表し，①より点 M，②より点 N を通る。すなわち③は直線 MN の方程式である。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k(t,\ 2)$ とおくと，点 Q が直線 MN 上にあることより，

$$t\cdot kt+2\cdot 2k=1,\quad k=\frac{1}{t^2+4}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{t^2+4}(t,\ 2)$ より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t}{t^2+4},\ \dfrac{2}{t^2+4}\right)$

(2)　$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，(1)より，$x=\dfrac{t}{t^2+4}\cdots\cdots\cdots④$，$y=\dfrac{2}{t^2+4}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より $x=\dfrac{t}{2}y$ となり，$y>0$ から $t=\dfrac{2x}{y}\cdots\cdots\cdots⑥$

⑥を⑤に代入して，$y\left(\dfrac{4x^2}{y^2}+4\right)=2$，$2x^2+2y^2=y$ となり，

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}y=0,\quad x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\cdots\cdots\cdots⑦$$

よって，点 Q の軌跡は円⑦である。ただし，$y>0$ から原点は除く。

［解　説］

軌跡についての有名な頻出問題です。(1)(2)とも，いろいろな解法がありますが，その 1 例を記しています。

**4**

問題のページへ

(1) $10^{10}<2^x3^y<10^{11}$ ……(A)より，$10<x\log_{10}2+y\log_{10}3<11$ ………①

$10^9<3^x2^y<10^{10}$ ……(B)より，$9<x\log_{10}3+y\log_{10}2<10$ ………②

ここで，$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ とおくと，①②は，

$$10<ax+by<11\ \cdots\cdots\text{③},\quad 9<bx+ay<10\ \cdots\cdots\text{④}$$

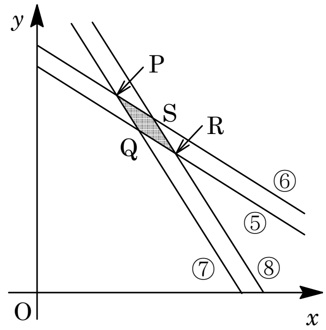
連立不等式③④で表される領域の境界線を，

$$ax+by=10,\quad y=-\frac{a}{b}x+\frac{10}{b}\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

$$ax+by=11,\quad y=-\frac{a}{b}x+\frac{11}{b}\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

$$bx+ay=9,\quad y=-\frac{b}{a}x+\frac{9}{a}\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

$$bx+ay=10,\quad y=-\frac{b}{a}x+\frac{10}{a}\ \cdots\cdots\text{⑧}$$




すると，直線⑤と⑥は平行，直線⑦と⑧は平行であり，領域は平行四辺形である。

また，直線⑤上の点$\left(0,\ \dfrac{10}{b}\right)$と直線⑥の距離を$d_1$，直線⑦上の点$\left(0,\ \dfrac{9}{a}\right)$と直線⑧の距離を$d_2$とおくと，

$$d_1=\frac{\left|b\cdot\frac{10}{b}-11\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad d_2=\frac{\left|a\cdot\frac{9}{a}-10\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって，$d_1=d_2$より，領域はひし形となる。

(2) まず，$0<a<b$ より，$-\dfrac{b}{a}<-1<-\dfrac{a}{b}<0$ となる。

ここで，直線⑥と⑦の交点をPとし，Pの$x$座標を$x_p$とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}=-\frac{b}{a}x_p+\frac{9}{a},\quad x_p=\frac{-11a+9b}{b^2-a^2}$$

直線⑤と⑦の交点をQとし，Qの$x$座標を$x_q$とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_q+\frac{10}{b}=-\frac{b}{a}x_q+\frac{9}{a},\quad x_q=\frac{-10a+9b}{b^2-a^2}$$

直線⑤と⑧の交点をRとし，Rの$x$座標を$x_r$とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_r+\frac{10}{b}=-\frac{b}{a}x_r+\frac{10}{a},\quad x_r=\frac{-10a+10b}{b^2-a^2}=\frac{10}{a+b}$$

直線⑥と⑧の交点をSとし，Sの$x$座標を$x_s$とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_s+\frac{11}{b}=-\frac{b}{a}x_s+\frac{10}{a},\quad x_s=\frac{-11a+10b}{b^2-a^2}$$

さて，$x+y$のとりうる値の範囲は，$x+y=k$すなわち$y=-x+k$ ……⑨として直線⑨が(1)の領域と共有点をもつ範囲として求められる。

(i) 直線⑨が点Qを通るとき

$$x+y=x_q-\frac{a}{b}x_q+\frac{10}{b}=\frac{b-a}{b}\cdot\frac{-10a+9b}{b^2-a^2}+\frac{10}{b}=\frac{19}{a+b}=\frac{19}{\log_{10}6}$$

(ii)　直線⑨が点 S を通るとき

$$x+y=x_s-\frac{a}{b}x_s+\frac{11}{b}=\frac{b-a}{b}\cdot\frac{-11a+10b}{b^2-a^2}+\frac{11}{b}=\frac{21}{a+b}=\frac{21}{\log_{10}6}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{19}{\log_{10}6}<x+y<\dfrac{21}{\log_{10}6}$

次に，$y-x$ のとりうる値の範囲は，$y-x=l$ すなわち $y=x+l$ ……⑩として直線⑩が(1)の領域と共有点をもつ範囲として求められる。

(iii) 直線⑩が点 R を通るとき

$$y-x=-\frac{a}{b}x_r+\frac{10}{b}-x_r=-\frac{a+b}{b}\cdot\frac{10}{a+b}+\frac{10}{b}=0$$

(iv) 直線⑩が点 P を通るとき

$$y-x=-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}-x_p=-\frac{a+b}{b}\cdot\frac{-11a+9b}{b^2-a^2}+\frac{11}{b}=\frac{2}{b-a}=\frac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}$$

(iii)(iv)より，$0<y-x<\dfrac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}$

(3)　点 P において，$x_p=\dfrac{-11a+9b}{b^2-a^2}=\dfrac{-11a+9b}{(b+a)(b-a)}=\dfrac{0.9829}{0.7781\times0.1761}$

$$-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}=x_p+\frac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}=x_p+\frac{2}{0.1761}$$

よって，点 $\mathrm{P}(x_p,\ y_p)$ とおくと，$x_p\fallingdotseq7.17$，$y_p\fallingdotseq18.53$ となる。

これより，$y-x$ が最大になる整数として，$(x,\ y)=(8,\ 18)$ が考えられ，この点が(1)の領域内にあるかどうかを調べると，

$$8a+18b=8\times0.3010+18\times0.4771=10.9958$$

$$8b+18a=8\times0.4771+18\times0.3010=9.2348$$

すると，不等式③と④をともに満たすことより，$y-x$ が最大になる整数は，$(x,\ y)=(8,\ 18)$ である。

［解　説］

内容は基本的ですが，計算によって疲労が蓄積する問題です。なお，(3)で 10.9958 というギリギリの値は，出題者の善意のためとみなし，それ以降の詰めは省きました。