1

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n が与えられたとき，

$$P_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,\ Q_n={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$$

とおく。次に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する a_ia_j の和を R_n とする。たとえば，$R_2=a_1a_2$，$R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$ である。同様に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する $(a_i-a_j)^2$ の和を S_n とする。たとえば，$S_2=(a_1-a_2)^2$，$S_3=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2$ である。次の問いに答えよ。

(1)　P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ。

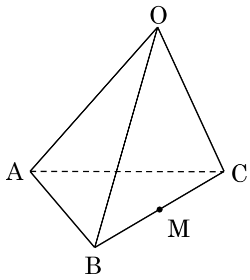
(2)　すべての $n\geqq 2$ に対して，$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$ と表されることを，数学的帰納法で証明せよ。

(3)　Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ。

(4)　$a_1+a_2+a_3+a_4=1$ のとき，Q_4 の最小値と，そのときの a_1，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ。

2

解答解説のページへ



右図のような四面体 OABC がある。各面 ABC, OBC, OCA, OAB の重心を，それぞれ P, Q, R, S とし，辺 BC の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{m}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{m}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(2)　線分 OP と線分 AQ の交点を G とする。線分 OP 上の点 U は，実数 s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$(0\leqq s\leqq 1)$ と表され，線分 AQ 上の点 V は，実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(0\leqq t\leqq 1)$ と表される。このことを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(3)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を表せ。

(4)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中から必要なものを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ をそれぞれ表せ。また，点 G が線分 BR および線分 CS 上にあることを示せ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ の増減およびグラフの凹凸を調べよ。また，y の最大値およびそのときの x の値，y の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

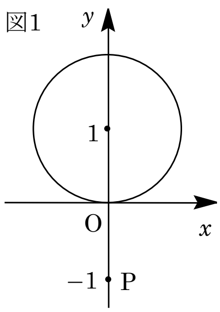
(2) 2 つの曲線 $y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ と $y=-x+2+\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ によって囲まれた図形 D を座標平面上に描け。なお，D の境界が座標軸と共有点をもつならば，その座標も記入せよ。

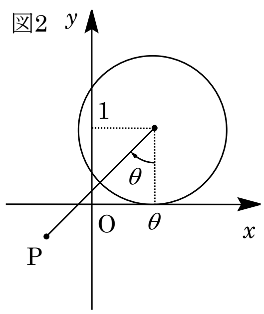
(3) 上の図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

半径 1 の円と長さ 2 の線分がある。この線分を一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える。線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする。この図形を図 1 のように xy 平面上におく。すなわち，中心が点$(0,\ 1)$，P が点$(0,\ -1)$と一致するようにおく。





次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる。図 2 は円が θ だけ回転したときの状態を表している。$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，点 P が描く曲線 C について考察する。次の問いに答えよ。

(1)　図 2 における点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2)　曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ。

(3)　曲線 C と 2 直線 $y=-1$ および $x=\pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　条件より，$P_4=(a_1+a_2+a_3+a_4)^2$，$Q_4={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2$

$R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4$

よって，$P_4=Q_4+2R_4$………①

(2)　$n\geqq 2$ に対して，$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$ の成立を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$ のとき　$S_2=(a_1-a_2)^2$，$Q_2={a_1}^2+{a_2}^2$，$R_2=a_1a_2$

よって，$S_2=(2-1)Q_2-2R_2$ が成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$S_k=(k-1)Q_k-2R_k$……②が成立すると仮定し，

$$(a_1-a_{k+1})^2+(a_2-a_{k+1})^2+\cdots+(a_k-a_{k+1})^2$$
$$={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2+k{a_{k+1}}^2-2(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})$$
$$=Q_k+k{a_{k+1}}^2-2(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})\cdots\cdots\cdots③$$

②＋③より，

$$S_k+(a_1-a_{k+1})^2+(a_2-a_{k+1})^2+\cdots+(a_k-a_{k+1})^2$$
$$=(k-1)Q_k+Q_k+k{a_{k+1}}^2-2R_k-2(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})$$
$$=k(Q_k+{a_{k+1}}^2)-2(R_k+a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})$$

よって，$S_{k+1}=kQ_{k+1}-2R_{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ に対して，$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$ である。

(3)　(2)から $S_4=3Q_4-2R_4$ となり，①を代入すると，

$$S_4=3Q_4-(P_4-Q_4)=-P_4+4Q_4,\quad Q_4=\frac{1}{4}P_4+\frac{1}{4}S_4$$

(4)　$a_1+a_2+a_3+a_4=1$ のとき，$P_4=1^2=1$ となり，

$$S_4=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_1-a_4)^2+(a_2-a_3)^2+(a_2-a_4)^2+(a_3-a_4)^2$$

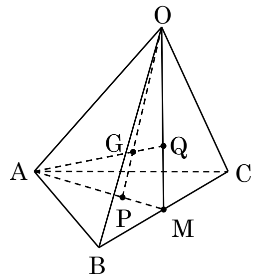
(3)から，$Q_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}S_4$ なので，Q_4 は $S_4=0$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとり，そのときの a_1，a_2，a_3，a_4 の値は $a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{1}{4}$ となる。

［解 説］

Q_4 の最小値を求めるために大掛かりな設定がされています。たとえば，有名なコーシー・シュワルツの不等式を利用すれば，ストレートなのですが。

２

問題のページへ



(1)　面 ABC, OBC の重心は，それぞれ P, Q なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}\vec{m},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{m}$$

(2)　線分 OP と線分 AQ の交点 G は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}s\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{m}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{m}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{m}$ は 1 次独立なので，①②より，$\frac{1}{3}s=1-t$　$\frac{2}{3}s=\frac{2}{3}t$

すると，$s=t=\frac{3}{4}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{m}\cdots\cdots\cdots③$

(3)　③より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdots\cdots\cdots④$

(4)　面 OCA, OAB の重心は，それぞれ R, S なので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

④より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

これより，点 G は線分 BR および線分 CS 上にある。

［解　説］

空間ベクトルの基本問題です。誘導がくどいと感じられるほど，細かくつけられています。

3

問題のページへ

(1)　$y=-x+2-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqq x\leqq 1)$ ……①に対して,

$$y'=-1-\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}},\quad y''=\frac{(1-x^2)-(-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$-1<x<1$ において, $y'=0$ とすると,

$$x=\sqrt{1-x^2},\ x^2=1-x^2\ (x\geqq 0)$$

よって, この解は $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり, y の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	3	↘	$2-\sqrt{2}$	↗	1

すると, y の最大値は 3 $(x=-1)$, 最小値は $2-\sqrt{2}$ $\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。

また, $-1<x<1$ において, $y''>0$ からグラフは下に凸となる。

(2)　$y=-x+2+\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqq x\leqq 1)$ ……②に対して,

$$y'=-1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}},\quad y''=-\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$-1<x<1$ において, $y'=0$ とすると,

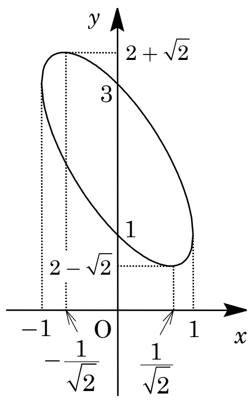
$$-x=\sqrt{1-x^2},\ x^2=1-x^2\ (x\leqq 0)$$

よって, この解は $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり, y の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	3	↗	$2+\sqrt{2}$	↘	1

また, $y''<0$ からグラフは上に凸となる。

以上より, ①②のグラフで囲まれた図形 D は右図のようになる。なお, y 軸との交点の座標は $(0,\ 1)$ と $(0,\ 3)$ である。



(3)　D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は,

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\{(-x+2+\sqrt{1-x^2})^2-(-x+2-\sqrt{1-x^2})^2\}dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}4(-x+2)\sqrt{1-x^2}\,dx=8\pi\int_{0}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

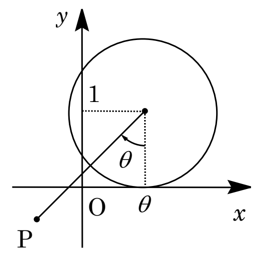
$$=16\pi\cdot\frac{1}{4}\pi=4\pi^2$$

［解　説］

題材は, 軸が座標軸に平行でない楕円です。ポイントは, (3)の定積分を力ずくで行わないところです。

4

問題のページへ



(1)　円がθだけ回転したとき，円の中心の座標は$(\theta,\ 1)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\theta,\ 1)+2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right)$$
$$=(\theta,\ 1)+2(-\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

$\mathrm{P}(x,\ y)$とおくと，$x=\theta-2\sin\theta$，$y=1-2\cos\theta$

(2)　(1)より，$\dfrac{dx}{d\theta}=1-2\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\sin\theta$

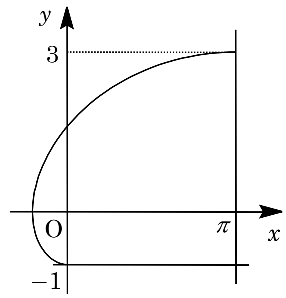
すると，$0\leqq\theta\leqq\pi$の範囲で，xとyの増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	0	↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$		$+$	
y	-1	↗	0	↗	3

これより，点Pが描く曲線C上にあって，x座標が最小となるのは点$\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0\right)$，最大となるのは点$(\pi,\ 3)$である。

また，y座標が最小となるのは点$(0,\ -1)$，最大となるのは点$(\pi,\ 3)$である。

(3)　曲線Cと2直線$y=-1$および$x=\pi$によって囲まれた図形の面積Sは，



$$S=\int_{-1}^{3}(\pi-x)dy=\int_0^{\pi}(\pi-\theta+2\sin\theta)2\sin\theta d\theta$$
$$=2\int_0^{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta d\theta+4\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

ここで，$I_1=\int_0^{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta d\theta$，$I_2=\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$とおくと，

$$I_1=-\left[(\pi-\theta)\cos\theta\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}(-\cos\theta)d\theta=\pi$$
$$I_2=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\pi$$

したがって，$S=2I_1+4I_2=4\pi$である。

［解 説］

(3)では，曲線の概形を描き，y軸方向に積分という方針を立てました。そして，三角関数の周期性を利用して計算を行っています。なお，同じパラメータ曲線が，今年は千葉大・医系でも出題されました。