1　解答解説のページへ

k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる 2 点で交わるものとする。その 2 つの交点を P, Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　k の値の範囲を求めよ。

(2)　2 点 P, Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ。

(3)　上の(2)の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする。r^2 を a と k で表せ。

(4)　点 R の座標を $(2,\ 1)$ とする。k の値が(1)で求めた範囲を動くとき，3 点 P, Q, R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 から $2n$ までの偶数の平方の和を a_n，奇数の平方の和を b_n とする。すなわち

$$a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2,\ \ b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

である。なお，1 から n までの自然数の平方の和については

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1) 偶数の平方の和 $2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2$ と奇数の平方の和 $1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2$ を求めよ。

(2) a_n と b_n を求めよ。

(3) $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ および $\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ を計算せよ。

(4) $c_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$ とするとき，$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ を求めよ。

3　解答解説のページへ

曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線を l とする。ただし，$1 < t < e$ とする。e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　接線 l の方程式を求めよ。

(2)　接線 l と y 軸との交点を Q とし，接線 l と x 軸との交点を R とする。Q と R の座標を求めよ。

(3)　接線 l と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D_1，接線 l と曲線 C および x 軸によって囲まれた図形を D_2 とする。D_1 の面積 $S_1(t)$ と D_2 の面積 $S_2(t)$ を求めよ。

(4)　$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく。このとき $S(t)$ の増減を調べ，その最小値およびそのときの t の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，関数$f(x)$と関数$g(x)$を

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x\,,\ \ g(x)=\cos\frac{x}{2}+c$$

と定義する。cは定数である。次の問いに答えよ。

(1)　区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，2 曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が$x=0$以外の点で接するように c の値を定め，接点$(p,\ q)$を求めよ。また，そのとき，区間$0 \leqq x \leqq \pi$における関数$f(x)$と関数$g(x)$の大小関係を調べよ。

(2)　定数 c と接点$(p,\ q)$は(1)で求めたものとする。そのとき，区間$0 \leqq x \leqq p$において，y 軸および 2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形を D とする。D をy軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vを求めよ。

1

問題のページへ

(1) 円 $x^2+y^2=1$ ……①と直線 $x+2y=k$ ……②が異なる 2 点 P, Q で交わる条件は, 円①の中心と直線②の距離が半径より小さいことに等しく,

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}<1,\ |k|<\sqrt{5},\ -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$$

(2) 2 点 P, Q を通る円の中心の軌跡は, 線分 PQ の垂直二等分線である。

すなわち, 円①の中心を通り, 方向ベクトルが直線②の法線ベクトルとなり, その成分が $(1,\ 2)$ であることより, 直線 $y=2x$ である。

(3) 2 点 P, Q を通る円の中心を $(a,\ 2a)$, 半径を r とすると,

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2,\ x^2+y^2-2ax-4ay=r^2-5a^2 \cdots\cdots\text{③}$$

すると, 円①と③の共通弦は, ①－③より, $2ax+4ay=1-r^2+5a^2$

$a\neq 0$ のときは, $x+2y=\dfrac{1-r^2+5a^2}{2a}$ となり, ②と一致することより,

$$\frac{1-r^2+5a^2}{2a}=k,\ r^2=5a^2-2ak+1$$

なお, この式は $a=0$ のときも成立している。

(4) (3)より, 円③は, $x^2+y^2-2ax-4ay=-2ak+1$ となり, $\mathrm{R}(2,\ 1)$ を通るので,

$$4+1-4a-4a=-2ak+1,\ ak=4a-2$$

$a=0$ のときは成立しないので, $k=\dfrac{4a-2}{a}$

さて, (1)から $|k|<\sqrt{5}$ なので, $\left|\dfrac{4a-2}{a}\right|<\sqrt{5}$ となり,

$$\left(\frac{4a-2}{a}\right)^2<5,\ (4a-2)^2<5a^2,\ 11a^2-16a+4<0$$

よって, 3 点 P, Q, R を通る円の中心の x 座標 a は, $\dfrac{8-2\sqrt{5}}{11}<a<\dfrac{8+2\sqrt{5}}{11}$

なお, この範囲は $a\neq 0$ を満たしている。

［解 説］

円と直線についての基本的な問題です。いろいろな解法が考えられますが, その解答例の 1 つです。

2

問題のページへ

(1) $a_{10}=2^2+4^2+\cdots+20^2=2^2(1^2+2^2\cdots+10^2)=4\cdot\dfrac{10\cdot11\cdot21}{6}=1540$

$$b_{10}=1^2+3^2+\cdots+19^2=1^2+2^2+\cdots+20^2-a_{10}=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}-1540=1330$$

(2) (1)と同様にすると,

$$a_n=2^2(1^2+2^2\cdots+n^2)=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$b_n=1^2+3^2+\cdots+(2n)^2-a_n=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

(3) (2)の結果を用いて,

$$\frac{1}{a_n}-\frac{3}{2n(2n+1)}=\frac{3}{2n(n+1)(2n+1)}-\frac{3}{2n(2n+1)}=\frac{3(1-n-1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$=-\frac{3}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$\frac{1}{b_n}+\frac{3}{2n(2n+1)}=\frac{3}{n(2n+1)(2n-1)}+\frac{3}{2n(2n+1)}=\frac{3(2+2n-1)}{2n(2n+1)(2n-1)}$$

$$=\frac{3}{2n(2n-1)}$$

(4) $c_n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{3}{2n(2n+1)}+\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{3}{2n(2n+1)}$から, (3)の結果を用いると,

$$c_n=-\frac{3}{2(n+1)(2n+1)}+\frac{3}{2n(2n-1)}=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{n(2n-1)}-\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right\}$$

すると，$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$ より,

$$S_n=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(2k-1)}-\frac{1}{(k+1)(2k+1)}\right\}=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot1}-\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right\}$$

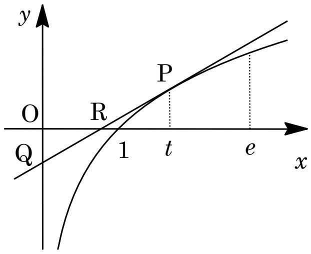
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2n^2+3n}{(n+1)(2n+1)}=\frac{3n(2n+3)}{2(n+1)(2n+1)}$$

［解 説］

数列の和に関する問題ですが, 過剰なほどの誘導がついています。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　$C: y=\log x$ に対して $y'=\dfrac{1}{x}$ となり，点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線 l の方程式は，

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t),\quad y=\frac{1}{t}x+\log t-1$$

(2)　l と y 軸との交点は $\mathrm{Q}(0,\ \log t-1)$，x 軸との交点は，

$$0=\frac{1}{t}x+\log t-1,\quad x=t(1-\log t)$$

よって，$\mathrm{R}(t(1-\log t),\ 0)$

(3)　l と x 軸および y 軸によって囲まれた図形の面積 $S_1(t)$ は，

$$S_1(t)=\frac{1}{2}t(1-\log t)(1-\log t)=\frac{1}{2}t(1-\log t)^2$$

また，l と C および x 軸によって囲まれた図形の面積 $S_2(t)$ は，

$$S_2(t)=\frac{1}{2}\{t-t(1-\log t)\}\log t-\int_1^t \log x\,dx=\frac{1}{2}t(\log t)^2-\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^t$$
$$=\frac{1}{2}t(\log t)^2-t\log t+t-1$$

(4)　$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$ より，

$$S(t)=\frac{1}{2}t(1-\log t)^2+\frac{1}{2}t(\log t)^2-t\log t+t-1=t(\log t)^2-2t\log t+\frac{3}{2}t-1$$

$$S'(t)=(\log t)^2+2\log t-2\log t-2+\frac{3}{2}$$
$$=(\log t)^2-\frac{1}{2}$$

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$S(t)$ の増減は右表のようになり，$t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき，最小値 $S\left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\dfrac{3}{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1=(2-\sqrt{2})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1$ をとる。

［解 説］

微積分の基本問題です。ただし，$1<t<e$ に注意して，位置関係を把握することが重要です。

$\boxed{4}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$，$g(x)=\cos\dfrac{x}{2}+c$　$(0\leqq x\leqq\pi)$に対し，曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が，$p\neq 0$として，点$(p,\ q)$で接することより，

$$f(p)=g(p)\cdots\cdots\cdots①,\ f'(p)=g'(p)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\dfrac{1}{2}\cos p=\cos\dfrac{p}{2}+c\cdots\cdots\cdots③$

②より，$-\dfrac{1}{2}\sin p=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{p}{2}$，$2\sin\dfrac{p}{2}\cos\dfrac{p}{2}=\sin\dfrac{p}{2}\cdots\cdots\cdots④$

④から，$\sin\dfrac{p}{2}\neq 0$なので，$\cos\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}$，$p=\dfrac{2}{3}\pi$となり，$q=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{4}$

③から，$c=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{3}\pi-\cos\dfrac{1}{3}\pi=-\dfrac{3}{4}$

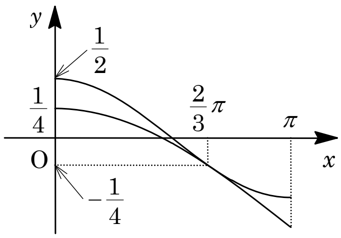
よって，接点$(p,\ q)=\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{1}{4}\right)$となり，さらに区間$0\leqq x\leqq\pi$において，

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}\cos x-\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$$

$$=\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$$

すなわち，$f(x)\geqq g(x)\left(\text{等号は }x=\dfrac{2}{3}\pi\text{ のとき成立}\right)$である。

(2)　区間$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$において，$y$軸および2曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形$D$を$y$軸のまわりに1回転してできる立体の体積$V$は，



$$V=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\left(\frac{1}{2}\cos x-\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\left(\cos x-2\cos\frac{x}{2}\right)dx+\frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\,dx$$

$$=\pi\Big[x\left(\sin x-4\sin\frac{x}{2}\right)\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}-\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(\sin x-4\sin\frac{x}{2}\right)dx+\frac{3}{2}\pi\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)-\pi\Big[-\cos x+8\cos\frac{x}{2}\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\frac{\pi^3}{3}$$

$$=-\sqrt{3}\pi^2-\pi\left(\frac{9}{2}-7\right)+\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^3}{3}-\sqrt{3}\pi^2+\frac{5}{2}\pi$$

［解 説］

2 曲線が接するという定義は，解答例の①かつ②です。また，(2)の求積は，いわゆる円筒分割の手法を用いています。