1　解答解説のページへ

放物線 $C: y=x^2$ 上に異なる 2 点 P, Q をとる。P, Q の x 座標をそれぞれ p, q (ただし，$p<q$)とする。直線 PQ の傾きを a とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　a を p, q を用いて表せ。

(2)　$a=1$ とする。直線 PQ と x 軸の正の向きとのなす角 θ_1 (ただし，$0<\theta_1<\pi$)を求めよ。

(3)　$a=1$ とする。放物線 C 上に点 R をとる。R の x 座標を r (ただし，$r<p$)とする。三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2 (ただし，$0<\theta_2<\pi$)を求めよ。また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ。さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ。

(4)　$a=2$ とする。放物線 C 上に点 S(1, 1) をとる。三角形 PQS が $\angle \mathrm{S}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

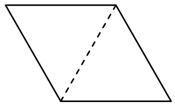


図1

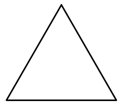


図2

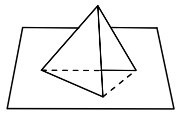


図3

ひし形の紙がある(図 1)。点線で半分に折ると正三角形になった(図 2)。これを少し開いて机の上に立てると，三角錐の形になる。その高さを次のようにして求めたい。

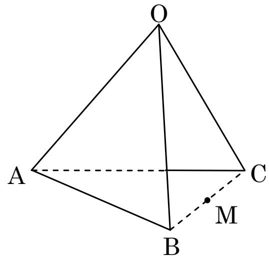


図4 (図3の拡大図)

図 4 において，2 つの正三角形 OAB と OAC の 1 辺の長さを 1 とする。点 O と平面 ABC との距離が，三角錐 OABC の高さになる。

空間ベクトルを利用してこの高さを求める。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ とおき，線分 BC の中点を M とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。また，$\left|\vec{b}+\vec{c}\right|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおくと，点 H は直線 AM 上にある。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つことを示せ。さらに，H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす点であるとき，t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(4)　三角錐 OABC の高さを h とする。h を $\cos\theta$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立つとき，θ と h の値を求めよ。

3　解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

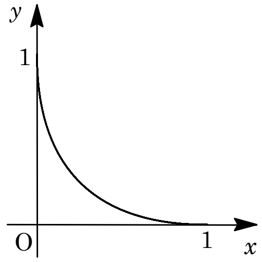
(1)　次の関係式によって定められる数列$\{a_n\}$について，一般項a_nと$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2)　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(3)　曲線$C : \sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$と$x$軸および$y$軸で囲まれた右図の図形を，$x$軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。



4

解答解説のページへ

自然対数の底を e とする。区間 $x \geqq 0$ で定義される関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ を考え，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる。それらを，P_0，P_1，P_2，$\cdots$とする。点 P_0 は原点である。

自然数 $n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

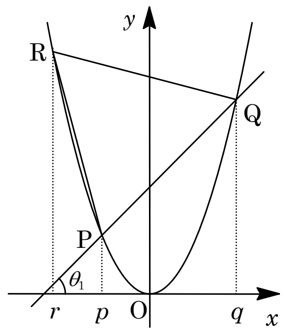
(1)　点 P_n の x 座標を求めよ。

(2)　面積 S_n を求めよ。

(3)　$I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k$ とする。このとき，I_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C: y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ に対して，直線 PQ の傾き a は，$a=\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=p+q$

(2)　$a=1$ のとき，直線 PQ と x 軸の正の向きとのなす角 θ_1 は，$\tan\theta_1=1$ より $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$

(3)　直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2 は，$\theta_2=\theta_1+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7}{12}\pi$ となり，このとき直線 PR の傾きは，

$$\tan\theta_2=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$$

同様に，直線 QR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_3 は，$\theta_3=\theta_2+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{11}{12}\pi$ となり，このとき，直線 QR の傾きは，$\tan\theta_3=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+1\cdot\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$

ここで，(1)から，$p+q=1$ ……①となり，同様にすると，

$p+r=-2-\sqrt{3}$ ………②，$q+r=-2+\sqrt{3}$ ………③

①②③から，$2(p+q+r)=-3$，$p+q+r=-\dfrac{3}{2}$ ……④であり，①④より $r=-\dfrac{5}{2}$，③④より $p=\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$ から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{3},\ \dfrac{13}{4}-\sqrt{3}\right)$，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{25}{4}\right)$ となるので，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(-3-\sqrt{3})^2}\right\}^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}(2\sqrt{6})^2\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$$

(4)　$a=2$ のとき，(1)から，$p+q=2$ ………⑤

さて，$\mathrm{S}(1,\ 1)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{SP}}=(p-1,\ p^2-1)=(p-1)(1,\ p+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=(q-1,\ q^2-1)=(q-1)(1,\ q+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=0$ となり，$1+(p+1)(q+1)=0$

②を代入して，$1+pq+2+1=0$，$pq=-4$ ………⑥

⑤⑥から，$p,\ q$ は t の 2 次方程式 $t^2-2t-4=0$ の 2 つの解となり，$p<q$ から，

$p=1-\sqrt{5}$，$q=1+\sqrt{5}$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{SP}}|=|p-1|\sqrt{1+(p+1)^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+(2-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{SQ}}|=|q-1|\sqrt{1+(q+1)^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+4\sqrt{5}}$

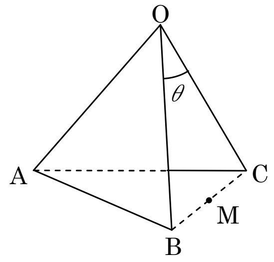
よって，$\triangle\mathrm{PQS}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+4\sqrt{5}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{100-80}=5\sqrt{5}$

［解 説］

放物線を題材にした図形と式についての基本的な問題です。

2

問題のページへ



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，M は線分 BC の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}，\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{3}$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

また，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ から，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1^2\cdot\cos\theta=\cos\theta$ となり，

$$|\vec{b}+\vec{c}|^2=1^2+2\cos\theta+1^2=2+2\cos\theta$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}(1-t)+\frac{t}{2}\cos\theta+\frac{t}{2}\cdot1^2-\frac{1}{2}(1-t)-\frac{t}{2}\cdot1^2-\frac{t}{2}\cos\theta=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つ。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$ から，

$$(1-t)\left(-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{t}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)+\frac{t}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\right)=0$$

すると，$-\frac{1}{2}(1-t)+\frac{t}{2}\cos\theta=0$ から，$t=\frac{1}{1+\cos\theta}$ ………(＊)

(4) (3)から(＊)のとき，$h=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=(1-t)^2+\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}t(1-t)+\frac{1}{2}t(1-t)+\frac{t^2}{2}\cos\theta$$

$$=\frac{t^2}{2}(1+\cos\theta)-t+1=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}-\frac{1}{1+\cos\theta}+1=\frac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

よって，$h=\sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}}$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のとき M は H と一致することから $t=1$ となり，(＊)より，

$$\frac{1}{1+\cos\theta}=1，\ \cos\theta=0$$

これより，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$h=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。

［解 説］

空間ベクトルの応用問題です。細かすぎるほどの誘導が付けられています。

3

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-(\sqrt{2}+1)a_n=1$ に対して，$a_{n+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=(\sqrt{2}+1)\Big(a_n+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ から，

$$a_n+\frac{\sqrt{2}}{2}=\Big(a_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)(\sqrt{2}+1)^{n-1}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)^{n-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)^n$$

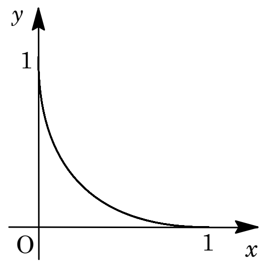
よって，$a_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}$ となり，$\sqrt{2}+1>1$ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ である。

(2)　$$L=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\Big)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{\frac{2}{n}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{\frac{3}{n}}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

(3)　$C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ から $y=(1-\sqrt{x})^2$ となり，C と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，



$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1(1-\sqrt{x})^4dx$$

ここで，$1-\sqrt{x}=t$ とおくと，$x=0\to1$ のとき $t=1\to0$ となり，$x=(1-t)^2$ から，$dx=-2(1-t)dt$ より，

$$V=\pi\int_1^0 t^4(-2)(1-t)\,dt=2\pi\int_0^1(t^4-t^5)\,dt=2\pi\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\Big)=\frac{\pi}{15}$$

［解 説］

数Ⅲ領域の基本小問 3 題ですが，この形式は，これまであまり見かけないものです。なお，(2)は頻出の区分求積です。

4

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ のとき $f(x) = e^{-x}\sin x$ に対して，$y = f(x)$ と x 軸との交点は，$\sin x = 0$ から，$x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$ となる。

これが P_0，P_1，P_2，P_3，…に対応するので，点 P_n の x 座標は $x = n\pi$ である。

(2)　$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸の上下の位置関係は変わらないので，線分 $P_{n-1}P_n$ と $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積 S_n は，

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| e^{-x}\sin x \right| dx = \left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\, dx \right|$$

ここで，$(e^{-x}\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$ ………①

$(e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$ ………②

①＋②より，$-2e^{-x}\sin x = \left\{ e^{-x}(\sin x + \cos x) \right\}'$ となり，

$$S_n = \left| -\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\sin x + \cos x) \Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} \right| = \frac{1}{2}\left| e^{-n\pi}\cos n\pi - e^{-(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| e^{-n\pi}(-1)^n - e^{-(n-1)\pi}(-1)^{n-1} \right| = \frac{e^{-n\pi}\left|(-1)^n\right|}{2}\left| 1 + e^{\pi} \right| = \frac{1+e^{\pi}}{2}e^{-n\pi}$$

(3)　$I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1+e^{\pi}}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-k\pi} = \frac{1+e^{\pi}}{2}\cdot\frac{e^{-\pi}(1-e^{-n\pi})}{1-e^{-\pi}} = \frac{(1+e^{\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(e^{\pi}-1)}$

そして，$n \to \infty$ のとき $e^{-n\pi} \to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1+e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$

［解　説］

面積と級数に関する超有名問題です。ひとひねり加えた類題が熊本大・医で出題されています。