1

解答解説のページへ

以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和をS_nとする。$S_n=6n-2a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$が成り立つとき，初項a_1および一般項a_nを求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=A$ とするとき，$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$の値を A を用いて表せ。

(3) 方程式 $\log_2 x^2=2+\log_2|x-2|$を解け。

(4) 関数$f(x)$を，$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<0) \\ x & (x\geqq 0)\end{cases}$と定義する。「微分係数の定義」にしたがって，$f(x)$の$x=0$における微分係数を求めよ。

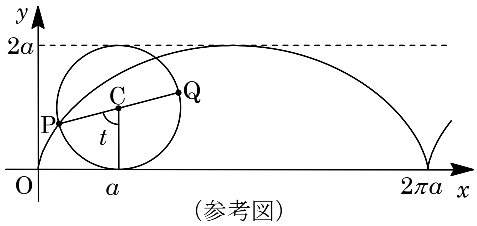
2

解答解説のページへ

半径 a の円が x 軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき，円周上の 2 つの定点 P と Q の運動について考える。時刻 $t=0$ のとき P は原点 O にあり，Q は点 $(0,\ 2a)$ にある。円は毎秒 1 ラジアンの速さで回転する。このとき，点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ は

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$$

で表される。以下の問いに答えよ。



（参考図）

(1)　時刻 t における円の中心 C と点 Q の座標を，それぞれ求めよ。

(2)　時刻 t における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ。また，時刻 t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲において，速さ $\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$ の最大値と最小値，およびそのときの P の座標を求めよ。

(3)　時刻 t における点 Q の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。さらに，内積 $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。

(4)　時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ から $t=\dfrac{3\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のり L_{P} と，点 Q が動く道のり L_{Q} を，それぞれ求めよ。

3

解答解説のページへ

t を正の実数とし，複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ がある。等式

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{t}|z-t|\cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の全体が表す図形を F とする。下の小問(1)から(4)を通して F がどのような図形を表すか調べたい。以下の問いに答えよ。

(1)　A と B はどちらも図形 F の点ではないことを示せ。

(2)　$t=1$ ならば，F はどのような図形を表すか。

(3)　$t\neq 1$ とする。図形 F の点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 AB 上に位置するような z の値は 2 つある。その値 z_1 と z_2 を求めよ。ただし，$|z_1|<|z_2|$ とする。

(4)　$t\neq 1$ とする。2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ として，m の値を求めよ。また，$\mathrm{P}(z)$ が図形 F の点であるとき，$|z-m|$ の値を求めよ。さらに，F はどのような図形を表すか。

4

解答解説のページへ

積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1) 部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2) $F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3) $n \geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n \geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4) $p(x)=x^n$ とおくとき，k 次導関数 $p^{(k)}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n! - e^{-x}\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。

1　問題のページへ

(1)　$S_n = 6n - 2a_n$ に対し，$S_1 = a_1$ なので，$a_1 = 6\cdot 1 - 2a_1$ から $a_1 = 2$

また，$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$ より，

$$a_n = (6n - 2a_n) - \{6(n-1) - 2a_{n-1}\} = -2a_n + 2a_{n-1} + 6$$

すると，$a_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1} + 2$ となり，$a_n - 6 = \dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 6)$ から，

$$a_n - 6 = (a_1 - 6)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$a_n = 6 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ となり，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

(2)　$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = A$ とするとき，$P = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$ とおくと，

$$P = 1 + 1 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$= 2 - 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4A^2$$

(3)　$\log_2 x^2 = 2 + \log_2|x-2|$ に対して，$x^2 > 0$ かつ $|x-2| > 0$ より，$x \neq 0$，$x \neq 2$

このとき，$\log_2 x^2 = 2\log_2 2 + \log_2|x-2|$，$\log_2 x^2 = \log_2 4|x-2|$ より，

$$x^2 = 4|x-2|$$

(i)　$x > 2$ のとき　$x^2 = 4(x-2)$ から $x^2 - 4x + 8 = 0$

$D/4 = 4 - 8 = -4 < 0$ となり，実数解をもたないので不適。

(ii)　$x < 2$ のとき　$x^2 = -4(x-2)$ から $x^2 + 4x - 8 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4+8} = -2 \pm 2\sqrt{3}$ となり，ともに $x < 2$，$x \neq 0$ を満たす。

(i)(ii)より，求める解は，$x = -2 \pm 2\sqrt{3}$ である。

(4)　$f(0) = 0$ なので，$f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ となり，

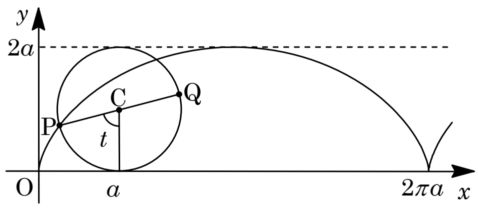
$$\lim_{x\to -0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to -0}(x+1) = 1,\quad \lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{x}{x} = 1$$

よって，$f'(0) = 1$ である。

［解　説］

昨年に引き続き，基本的な単問 4 題のセットです。この傾向は今後も続くのでしょうか。

2　　　　問題のページへ



(1)　条件より，点$\mathrm{P}(x,\ y)$とすると，

$$x = a(t - \sin t) \cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = a(1 - \cos t) \cdots\cdots\cdots ②$$

また，円の中心 C の座標は$\mathrm{C}(at,\ a)$となり，さらに線分 PQ の中点が C なので，点$\mathrm{Q}(x,\ y)$とおくと，①②から，

$$x = 2at - a(t - \sin t) = a(t + \sin t) \cdots\cdots\cdots ③$$

$$y = 2a - a(1 - \cos t) = a(1 + \cos t) \cdots\cdots\cdots ④$$

(2)　①②より，$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right) = \left(a(1 - \cos t),\ a\sin t\right)$となり，

$$\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t)$$

すると，$0 \leqq t \leqq 2\pi$において，$\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$の最大値は$\sqrt{2a^2(1+1)} = 2a$であり，このとき$\cos t = -1$から$t = \pi$となるので$\mathrm{P}(\pi a,\ 2a)$である。

また，$\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$の最小値は$\sqrt{2a^2(1-1)} = 0$であり，このとき$\cos t = 1$から$t = 0,\ 2\pi$となるので$\mathrm{P}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(2\pi a,\ 0)$である。

(3)　③④より，$\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right) = \left(a(1 + \cos t),\ -a\sin t\right)$となり，

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}} \cdot \overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}} = a^2(1 - \cos t)(1 + \cos t) - a^2\sin^2 t = a^2\{(1 - \cos^2 t) - \sin^2 t\} = 0$$

(4)　条件より，$L_{\mathrm{P}} = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right| dt$，$L_{\mathrm{Q}} = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}\right| dt$なので，

$$L_{\mathrm{P}} = \sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos t}\,dt = 2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt$$

$$= 2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\Big[\cos\frac{t}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -4a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}a$$

また，$\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}\right|^2 = a^2(1 + \cos t)^2 + a^2\sin^2 t = 2a^2(1 + \cos t) = 4a^2\cos^2\dfrac{t}{2}$より，

$$L_{\mathrm{Q}} = 2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt = 2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt + 2a\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 4a\Big[\sin\frac{t}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 4a\Big[\sin\frac{t}{2}\Big]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 4a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 4(2 - \sqrt{2})a$$

［解 説］

サイクロイドを題材にした積分の応用問題です。ただ，問題の参考図に様々な手掛かりが明示されています。

3

問題のページへ

(1)　$t>0$ で，複素数平面上の点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ に対し，$t\left|z+\dfrac{1}{t}\right|=\dfrac{1}{t}\left|z-t\right|$ ………(a)

まず，$z=t$ のとき(a)は $t\left|t+\dfrac{1}{t}\right|=0$ となり不成立，また $z=-\dfrac{1}{t}$ のとき(a)は $0=\dfrac{1}{t}\left|-\dfrac{1}{t}-t\right|$ となり不成立である。

すなわち, A と B はどちらも(a)を満たさず, 図形 F の点ではない。

(2)　$t=1$ のとき, (a)は $\left|z+1\right|=\left|z-1\right|$ となり，$\mathrm{P}(z)$ は 2 点 -1, 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。すなわち, F は虚軸を表す。

(3)　直線 AB 上にあり, (a)より $\left|z-t\right|:\left|z+\dfrac{1}{t}\right|=t:\dfrac{1}{t}$ を満たす点 $\mathrm{P}_1(z_1)$ と $\mathrm{P}_2(z_2)$ は, 線分 AB を $t:\dfrac{1}{t}$ に内分する点, 外分する点に一致する。

そこで, 線分 AB を内分する点 w_1，外分する点 w_2 とおくと,

$$w_1=\frac{\frac{1}{t}\cdot t+t\left(-\frac{1}{t}\right)}{t+\frac{1}{t}}=\frac{1-1}{t+\frac{1}{t}}=0,\quad w_2=\frac{-\frac{1}{t}\cdot t+t\left(-\frac{1}{t}\right)}{t-\frac{1}{t}}=\frac{-1-1}{t-\frac{1}{t}}=\frac{-2t}{t^2-1}$$

すると，$\left|z_1\right|<\left|z_2\right|$ から，$z_1=w_1=0$，$z_2=w_2=\dfrac{-2t}{t^2-1}$ である。

(4)　点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ とすると，$m=\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{-t}{t^2-1}$

さて(a)より，$t^2\left|z+\dfrac{1}{t}\right|^2=\dfrac{1}{t^2}\left|z-t\right|^2$ として，$t^2\left(z+\dfrac{1}{t}\right)\left(\bar{z}+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t^2}(z-t)(\bar{z}-t)$

$$t^2\left(z\bar{z}+\frac{1}{t}z+\frac{1}{t}\bar{z}+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{t^2}(z\bar{z}-tz-t\bar{z}+t^2)$$

$$\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)z\bar{z}+\left(t+\frac{1}{t}\right)z+\left(t+\frac{1}{t}\right)\bar{z}=0$$

$t+\dfrac{1}{t}>0$ より，$\left(t-\dfrac{1}{t}\right)z\bar{z}+z+\bar{z}=0$ となり，$z\bar{z}+\dfrac{t}{t^2-1}z+\dfrac{t}{t^2-1}\bar{z}=0$ から,

$$\left(z+\frac{t}{t^2-1}\right)\left(\bar{z}+\frac{t}{t^2-1}\right)=\left(\frac{t}{t^2-1}\right)^2$$

すると，$(z-m)(\bar{z}-m)=(-m)^2$ となり，$\left|z-m\right|^2=m^2$ から $\left|z-m\right|=\left|m\right|$

これより, F は中心が $\mathrm{M}(m)$ で半径が $\left|m\right|$ の円を表す。

［解 説］

複素数平面上の軌跡を問う超有名問題です。たいへん詳細な誘導がついています。なお, (4)がアポロニウスの円であることは経験済みと思われますが。

4

問題のページへ

(1) $F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して，

$$F_2(x)=\int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^2}{2}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x te^{-t}\,dt=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)$$

$$F_1(x)=\int_0^x \frac{t^1}{1!}e^{-t}\,dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+F_0(x)$$

(2) $F_0(x)=\int_0^x e^{-t}\,dt=-\Big[e^{-t}\Big]_0^x=-(e^{-x}-1)=1-e^{-x}$

$$F_1(x)=-xe^{-x}+F_0(x)=-xe^{-x}+1-e^{-x}=1-(1+x)e^{-x}$$

$$F_2(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+1-(1+x)e^{-x}=1-\Big(1+x+\frac{x^2}{2}\Big)e^{-x}$$

(3) $F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^n}{n!}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+F_{n-1}(x)$

すると，$n\geqq 1$で，$F_n(x)=F_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\{F_k(x)-F_{k-1}(x)\}$より，

$$F_n(x)=1-e^{-x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}=1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

この式は$n=0$のときも成立している。

(4) $p(x)=x^n$ のとき，$p'(x)=nx^{n-1}$，$p''(x)=n(n-1)x^{n-2}$となり，

$$p'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}=\frac{n!}{(n-3)!}x^{n-3}$$

$$p^{(4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}=\frac{n!}{(n-4)!}x^{n-4}$$

すると，帰納的に，$p^{(k)}(x)=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$である。

さて，$n!F_n(x)=\int_0^x t^ne^{-t}\,dt$より，(3)の結果を代入すると，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!\Big(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\Big)=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

ここで，$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ となるので，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

［解　説］

定積分と関数列の融合問題です。本問も非常に細かな誘導がつけられています。なお，$p^{(k)}(x)$について，気になるのであれば数学的帰納法です。