1

解答解説のページへ

a, b を実数とする。xy 平面上で，直線 $l : y = ax + b$ は曲線 $C : y = (x+1)(2-x)$ と，x 座標が $0 \leqq x \leqq 2$ を満たす点で接しているとする。

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め，ab 平面上に図示せよ。

(2)　曲線 C および 3 つの直線 l，$x = 0$，$x = 2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a，b の値と，このときの面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

自然数 n に対して，不等式 $0 \leqq a \leqq 2b \leqq c \leqq n$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を $P(n)$ とする。

(1) $P(5)$ を求めよ。

(2) 奇数 n に対して，$P(n)$ を求めよ。

$\boxed{3a}$

解答解説のページへ

座標空間内に 4 点 $\mathrm{P}(3,\ 1,\ 4)$，$\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{C}(2,\ 1,\ 1)$ がある。直線 PA と xy 平面の交点を A'，直線 PB と xy 平面の交点を B'，直線 PC と xy 平面の交点を C' とする。

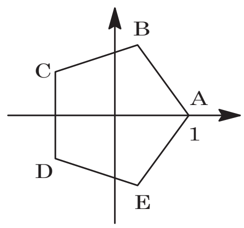
(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の面積を求めよ。

$\boxed{3b}$

解答解説のページへ

複素数平面上に，図のような原点を中心とする正五角形 ABCDE がある。ここで，頂点 A が表す複素数は 1 である。2 頂点 C, D の中点を F とし，点 F が表す複素数を h とする。



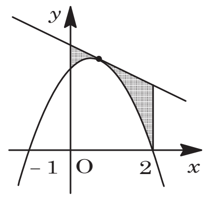
(1)　h が $4h^2+2h-1=0$ を満たすことを示せ。

(2)　h を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$l : y = ax + b$ ………①，$C : y = (x+1)(2-x)$ ………②



②より，$y = -x^2 + x + 2$，$y' = -2x + 1$

接点$(t,\ -t^2 + t + 2)$とすると，条件より $0 \leqq t \leqq 2$………③

接線の方程式は，$y = (-2t+1)(x-t) + (-t^2 + t + 2)$

$$= (-2t+1)x + t^2 + 2$$

これが①と一致するので，

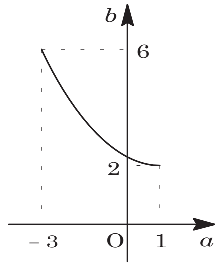
$a = -2t + 1$ ………④，$b = t^2 + 2$ ………⑤

④より，$t = -\dfrac{1}{2}(a-1)$

⑤に代入して，$b = \dfrac{1}{4}(a-1)^2 + 2$

③より，$-3 \leqq -2t + 1 \leqq 1$ から $-3 \leqq a \leqq 1$

以上より，点$(a,\ b)$の存在範囲は右図のようになる。



(2)　④⑤を①に代入して，$y = (-2t+1)x + (t^2 + 2)$

右上図の網点部の面積を S とすると，

$$S = \int_0^2 \left\{ (-2t+1)x + (t^2+2) - (-x^2 + x + 2) \right\} dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 2tx + t^2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2 x \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 4t + 2t^2 = 2(t-1)^2 + \frac{2}{3}$$

③より，$t = 1$ のとき S は最小値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。

このとき，④⑤より，$a = -1$，$b = 3$

［解 説］

第 1 問は微積分の基本題です。特に工夫もせず，普通に解きました。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$0 \leqq a \leqq 2b \leqq c \leqq 5$ のとき，$b=0$，1，2 となる。

(i)　$b=0$ のとき
$a=0$，$0 \leqq c \leqq 5$ より，$(a,\ b,\ c)$ の組の個数は，$1 \times 6 = 6$ となる。

(ii)　$b=1$ のとき
$0 \leqq a \leqq 2$，$2 \leqq c \leqq 5$ より，$(a,\ b,\ c)$ の組の個数は，$3 \times 4 = 12$ となる。

(iii)　$b=2$ のとき
$0 \leqq a \leqq 4$，$4 \leqq c \leqq 5$ より，$(a,\ b,\ c)$ の組の個数は，$5 \times 2 = 10$ となる。

(i)(ii)(iii)より，$P(5) = 6 + 12 + 10 = 28$

(2)　n が奇数なので $n = 2m-1\ (m \geqq 1)$ とすると，$0 \leqq a \leqq 2b \leqq c \leqq 2m-1$ なので，b のとりうる値は，$b = 0$，1，$\cdots$，$m-1$ となる。

さて，$b = k\ (0 \leqq k \leqq m-1)$ のとき，$0 \leqq a \leqq 2k$，$2k \leqq c \leqq 2m-1$ より，$(a,\ b,\ c)$ の組の個数は，$(2k+1)(2m-1-2k+1) = (2k+1)(2m-2k)$ となるので，

$$P(2m-1) = \sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)(2m-2k) = \sum_{k=0}^{m-1}\left\{-4k^2 + 2(2m-1)k + 2m\right\}$$

$$= -4 \cdot \frac{1}{6}(m-1)m(2m-1) + 2(2m-1) \cdot \frac{1}{2}(m-1)m + 2m^2$$

$$= \frac{1}{3}m(2m^2 + 3m + 1) = \frac{1}{3}m(2m+1)(m+1)$$

ここで，$n = 2m-1$ より，$m = \dfrac{n+1}{2}$ となり，

$$P(n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot (n+2) \cdot \frac{n+3}{2} = \frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)$$

［解　説］

(1)は(2)の誘導となっています。まず(1)で b の値を固定すれば数えやすいということを見つけ，それを(2)で一般化するわけです。

3a

問題のページへ

(1)　条件より，$\overrightarrow{AB}=(0,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ -1,\ -2)$ となるので，$|\overrightarrow{AB}|^2=2$，$|\overrightarrow{AC}|^2=6$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$ から，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\times6-3^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)　直線 PA の方程式は，$\overrightarrow{PA}=(-2,\ 1,\ -1)$ より，

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 4)+t_1(-2,\ 1,\ -1)=(3-2t_1,\ 1+t_1,\ 4-t_1)$$

$z=0$ とすると $t_1=4$ となり，このとき $x=-5$，$y=5$ から $A'(-5,\ 5,\ 0)$ となる。

直線 PB の方程式は，$\overrightarrow{PB}=(-2,\ 0,\ -2)=2(-1,\ 0,\ -1)$ より，

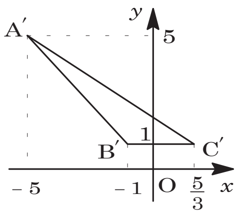
$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 4)+t_2(-1,\ 0,\ -1)=(3-t_2,\ 1,\ 4-t_2)$$

$z=0$ とすると $t_2=4$ となり，このとき $x=-1$，$y=1$ から $B'(-1,\ 1,\ 0)$ となる。

直線 PC の方程式は，$\overrightarrow{PC}=(-1,\ 0,\ -3)$ より，

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 4)+t_3(-1,\ 0,\ -3)=(3-t_3,\ 1,\ 4-3t_3)$$

$z=0$ とすると，$t_3=\dfrac{4}{3}$ となり，このとき $x=\dfrac{5}{3}$，$y=1$ から $C'\left(\dfrac{5}{3},\ 1,\ 0\right)$ となる。



ここで，3 点 A′，B′，C′ を xy 平面に図示すると，右図のようになるので，

$$\triangle A'B'C'=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{3}+1\right)\times(5-1)=\frac{16}{3}$$

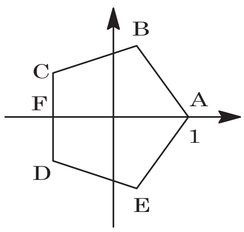
［解 説］

(1)は公式で処理しましたので，単なる数値代入だけです。(2)も同様にしようかと思いましたが, 3 点 A′，B′，C′ の配置を考えて，底辺×高さ÷2 で計算しました。

3b

問題のページへ

(1)　B(α)とおくと，C(α^2)，D(α^3)，E(α^4)となり，$\alpha^5 = 1$ ………①



$$(\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$\alpha \neq 1$より，$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ ………②

ここで，$h = \dfrac{\alpha^2 + \alpha^3}{2}$より，①②を用いて，

$$\begin{aligned} 4h^2 + 2h - 1 &= 4\left(\frac{\alpha^2 + \alpha^3}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{\alpha^2 + \alpha^3}{2} - 1 \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha^3 - 1 \\ &= \alpha^4 + 2 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2)　(1)より $4h^2 + 2h - 1 = 0$なので，$h = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$h<0$ より，$h = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4}$

［解 説］

複素数を利用して，72°や144°の三角比の値を求めるという有名な問題です。本問では, (1)の誘導があるので，類題経験がなくても大丈夫です。