1

解答解説のページへ

座標平面上に，双曲線$C: x^2 - y^2 = 1$と点$\mathrm{A}(2,\ 0)$がある。

(1)　点Aを通り双曲線Cと1点のみで交わる直線を求めよ。

(2)　直線lが点Aを通り双曲線Cと相異なる2点で交わるように動くとき，この2点の中点は，あるひとつの双曲線上にあることを示せ。

2

解答解説のページへ

この問題では, e は自然対数の底, log は自然対数を表す。

実数 a, b に対して, 直線 $l: y=ax+b$ は曲線 $C: y=\log(x+1)$ と, x 座標が $0 \leqq x \leqq e-1$ を満たす点で接しているとする。

(1) このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め, ab 平面上に図示せよ。

(2) 曲線 C および 3 つの直線 l, $x=0$, $x=e-1$ で囲まれた図形の面積を最小にする a, b の値と, このときの面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

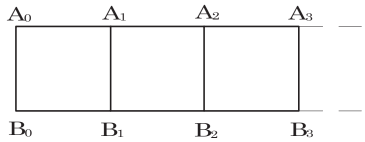
図のように，平面上に点 A_0，A_1，A_2，……および B_0，B_1，B_2，……が並んでいる。点Pは A_0 から出発し，次の規則に従いこれらの点の上を移動する。

　Pが A_n にいるときには1秒後に A_{n+1} または B_n に，一方 B_n にいるときには B_{n+1} または A_n に移動する。ただし，前にいた点には戻らない。また, Pが移動しうる点が複数あるときには，それぞれの点へ等確率で移動する。

Pが A_n へ到る行き方が a_n 通り，B_n へ到る行き方が b_n 通りあるとする。

(1)　a_3，b_3 を求めよ。

(2)　a_n，b_n を求めよ。



(3)　一方，点Qは A_8 からPと同時に出発し，1秒ごとに順次 $\mathrm{A}_8 \to \mathrm{A}_7 \to \mathrm{A}_6 \to \cdots\cdots \to \mathrm{A}_0$ と移動し，その後は A_0 にとどまる。PとQが出会う確率を求めよ。

$\boxed{4a}$ 解答解説のページへ

座標空間内の 6 つの平面 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ で囲まれた立方体を C とする。$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ を $a_1>0$，$a_2>0$，$a_2>0$ を満たし，大きさが 1 のベクトルとする。H を原点 O を通りベクトル $\vec{l}$ に垂直な平面とする。このとき，ベクトル $\vec{l}$ を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を，a_1，a_2，a_3 を用いて表せ。ここに，C の影とは C 内の点から平面 H へひいた垂線の足全体のなす図形である。

4b

解答解説のページへ

実数を係数とする 3 次方程式$x^3+px^2+qx+r=0$は，相異なる虚数解α，βと実数解γをもつとする。

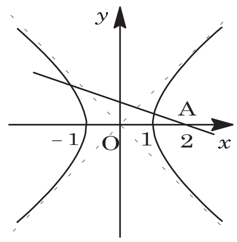
(1)　$\beta=\overline{\alpha}$が成り立つことを証明せよ。ここで，$\overline{\alpha}$はαと共役な複素数を表す。

(2)　α，β，γが等式$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$を満たし，さらに複素数平面上で$\alpha$，$\beta$，$\gamma$を表す 3 点は 1 辺の長さが$\sqrt{3}$の正三角形をなすものとする。このとき，実数の組$(p,\ q,\ r)$をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　点$\mathrm{A}(2,\ 0)$を通る直線$x=2$は，双曲線$C: x^2-y^2=1$……①と明らかに 2 点で交わる。



また，点Aを通り，傾きmの直線は，

$y=m(x-2)$………②

①②より，$x^2-m^2(x-2)^2=1$

$(1-m^2)x^2+4m^2x-4m^2-1=0$………③

(i)　$1-m^2=0\ (m=\pm 1)$のとき

③より，$4x-5=0$，$x=\dfrac{5}{4}$

$m=1$のとき②より$y=-\dfrac{3}{4}$，$m=-1$のとき②より$y=\dfrac{3}{4}$

いずれの場合も，①と②は 1 点でのみ交わる。

(ii)　$1-m^2\neq 0\ (m\neq\pm 1)$のとき

③の判別式$D/4=4m^4+(1-m^2)(4m^2+1)=3m^2+1>0$

よって，①と②はつねに 2 点で交わる。

(i)(ii)より, Aを通りCと 1 点のみで交わる直線は，$y=x-2$，$y=-x+2$

(2)　まず，$l: x=2$のとき, 2 交点の中点は点$(2,\ 0)$である。

また，$l: y=m(x-2)\ (m\neq\pm 1)$のとき, 2 交点の中点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とする。

ここで，③の 2 つの解を$x=\alpha,\ \beta$とすると，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-4m^2}{2(1-m^2)}=\frac{2m^2}{m^2-1}\text{………④}$$

②より，$y=m(x-2)$……⑤となり，④と⑤の交点が$\mathrm{P}(x,\ y)$なので，

$x\neq 2$から，⑤より$m=\dfrac{y}{x-2}$

④に代入して，$x\left\{\left(\dfrac{y}{x-2}\right)^2-1\right\}=2\left(\dfrac{y}{x-2}\right)^2$

$x\left\{y^2-(x-2)^2\right\}=2y^2$，$(x-2)y^2-x(x-2)^2=0$

$x\neq 2$より，$y^2-x(x-2)=0$，$x^2-2x-y^2=0$，$(x-1)^2-y^2=1$

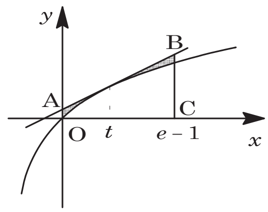
点$(2,\ 0)$もこの式を満たすので，点Pは双曲線$(x-1)^2-y^2=1$上にある。

［解 説］

(1)の解はていねいに書きましたが，漸近線に平行な直線だけが，双曲線と 1 点のみで交わるのは明らかです。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$y=\log(x+1)$ より，$y'=\dfrac{1}{x+1}$



$0\leqq t\leqq e-1$ として，接点を $(t,\ \log(t+1))$ とすると，接線の方程式は，

$$y=\frac{1}{t+1}(x-t)+\log(t+1)$$
$$=\frac{1}{t+1}x-\frac{t}{t+1}+\log(t+1)$$

この方程式が $y=ax+b$ と一致するので，

$$a=\frac{1}{t+1}\cdots\cdots\cdots①,\quad b=-\frac{t}{t+1}+\log(t+1)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$t+1=\dfrac{1}{a}$，$t=\dfrac{1}{a}-1$

②に代入して，$b=-1+a-\log a\cdots\cdots\cdots③$

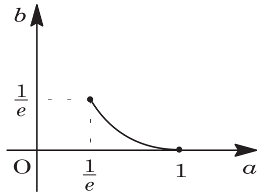
ここで，$0\leqq t\leqq e-1$ より，$\dfrac{1}{e}\leqq a\leqq 1$

③より，$b'=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}$

$$b''=\frac{1}{a^2}>0$$

a	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
b'		$-$	0
b	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

よって，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図のようになる。



(2)　台形 AOCB の面積を S_0 とすると，

$$\mathrm{OA}=b,\quad \mathrm{CB}=a(e-1)+b$$
$$S_0=\frac{b+a(e-1)+b}{2}\cdot(e-1)=\frac{e-1}{2}\left\{(e-1)a+2b\right\}$$

ここで，$f(t)=(e-1)a+2b$ とおくと，①②より，

$$f(t)=\frac{e-1}{t+1}-\frac{2t}{t+1}+2\log(t+1)$$
$$=\frac{e+1}{t+1}+2\log(t+1)-2$$
$$f'(t)=-\frac{e+1}{(t+1)^2}+\frac{2}{t+1}=\frac{2t-e+1}{(t+1)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{e-1}{2}$	$\cdots$	$e-1$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

右表より，$t=\dfrac{e-1}{2}$ のとき $f(t)$ は最小値をとる。

$$f\left(\frac{e-1}{2}\right)=\frac{2(e+1)}{(e-1)+2}+2\log\left(\frac{e-1}{2}+1\right)-2=2\log\frac{e+1}{2}$$

さて，求める網点部の面積を S とすると，

$$S = S_0 - \int_0^{e-1} \log(x+1)\,dx$$
$$= \frac{e-1}{2} f(t) - \left\{ \Big[(x+1)\log(x+1) \Big]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} dx \right\}$$
$$= \frac{e-1}{2} f(t) - e + (e-1) = \frac{e-1}{2} f(t) - 1$$

以上より，S は $t = \dfrac{e-1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{e-1}{2} f\left(\dfrac{e-1}{2}\right) - 1 = (e-1)\log\dfrac{e+1}{2} - 1$ をとる。

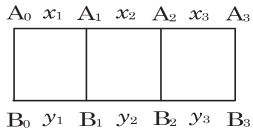
このとき，①より $a = \dfrac{2}{e+1}$，②より $b = -\dfrac{e-1}{e+1} + \log\dfrac{e+1}{2}$

［解 説］

微積分総合と称される分野の典型問題です。(2)は図形的に考えてもよいのですが，ここではオーソドックスに解きましたので，B5 版 1 枚では収まりませんでした。

3　　　問題のページへ

(1)　$1 \leqq i \leqq 3$ として，右に移動する $\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i$ のルートを x_i，$\mathrm{B}_{i-1}\mathrm{B}_i$ のルートを y_i とする。また，$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$，$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$，$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$，$\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$ のルートは，右に移動するルートに対応して 1 通りずつ決まる。



すると，A_0 から A_3 に到るルートの組合せは，

$(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$(x_1,\ x_2,\ y_3)$，$(x_1,\ y_2,\ x_3)$，$(x_1,\ y_2,\ y_3)$，

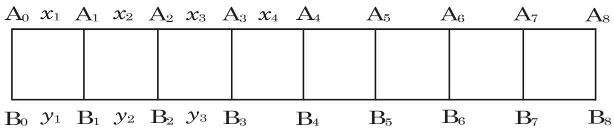
$(y_1,\ x_2,\ x_3)$，$(y_1,\ x_2,\ y_3)$，$(y_1,\ y_2,\ x_3)$，$(y_1,\ y_2,\ y_3)$

したがって，$a_3 = 8$

A_0 から B_3 に到るルートの組合せも上記の 8 通りなので，$b_3 = 8$ となる。

(2)　(1)と同様に考えて，右に移動するルートは，$1 \leqq i \leqq n$ として，x_i または y_i を選べばよいので，$a_n = b_n = 2^n$ となる。

(3)　P と Q は，A_4 で 4 秒後に，または A_3 で 5 秒後に出会う場合しかない。



4 秒後に出会うとき，P の右に移動するルートは，$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ より，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ となる。

また, 5 秒後に出会うとき, P の右に移動するルートは,

$(x_1,\ x_2,\ y_3)$，$(x_1,\ y_2,\ x_3)$，$(y_1,\ x_2,\ x_3)$，$(x_1,\ y_2,\ y_3)$，

$(y_1,\ y_2,\ x_3)$，$(y_1,\ y_2,\ y_3)$

その確率は順に，$\left(\frac{1}{2}\right)^4$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3$，$\left(\frac{1}{2}\right)^4$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3$，$\left(\frac{1}{2}\right)^4$ となるので，合わせて，$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3 = \frac{9}{16}$ となる。

以上より, P と Q が出会う確率は，$\frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{5}{8}$

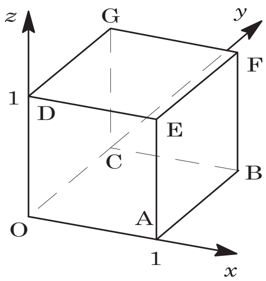
［解 説］

(1)や(3)は具体的に考え，その過程を解として書く問題です。しかし，考えたことをわかりやすく表現しようとすると，ずいぶん時間がかかってしまいます。

4a

問題のページへ

立方体 C を平面 H へ正射影した図形は，面 OABC，面 OAED，面 OCGD を H へ正射影した図形となる。



まず，面 OABC の法線ベクトルを $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$，また，平面 H の法線ベクトルが $\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ なので，面 OABC と平面 H のなす角を θ_1 $(0°\leqq\theta_1\leqq 90°)$ とすると，

$$\cos\theta_1=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\vec{l}\,|}=\frac{|-a_3|}{1\times 1}=a_3$$

すると，面 OABC の面積が 1 より，H へ正射影した図形の面積は，

$$1\times\cos\theta_1=a_3$$

同様にして，面 OAED，面 OCGD は，法線ベクトルがそれぞれ $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ 0)$ となり，平面 H とのなす角を θ_2，θ_3 $(0°\leqq\theta_2\leqq 90°,\ 0°\leqq\theta_3\leqq 90°)$ とすると，

$$\cos\theta_2=\frac{|\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\vec{l}\,|}=\frac{|-a_2|}{1\times 1}=a_2$$

$$\cos\theta_3=\frac{|\overrightarrow{n_3}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_3}|\cdot|\vec{l}\,|}=\frac{|-a_1|}{1\times 1}=a_1$$

すると，面 OAED，面 OCGD の面積が 1 より，H へ正射影した図形の面積は，それぞれ，

$$1\times\cos\theta_2=a_2,\quad 1\times\cos\theta_3=a_1$$

以上より，求める立方体 C の影の面積は，$a_1+a_2+a_3$ となる。

［解 説］

この問題を読んだ瞬間，名大の有名問題を思い出しました。旧課程時代に作成したいろいろなテキストに，凸多面体を平面へ正射影する典型題として，よく採用したのですが，出題年度を調べたところ 1987 年でした。もう時効でしょうか。

4b　　問題のページへ

(1)　$x^3+px^2+qx+r=0$ ……①が虚数解 $x=\alpha$ をもつとき,

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$$

両辺の共役をとると, p, q, r が実数より,

$$\overline{\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r}=\overline{0},\quad \overline{\alpha}^3+p\overline{\alpha}^2+q\overline{\alpha}+r=0$$

これは, $x=\overline{\alpha}$ が①の解であることを示すので, $\beta=\overline{\alpha}$ となる。

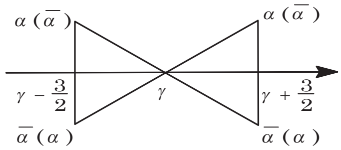
(2)　(1)より①の解が α, $\overline{\alpha}$, γ となるので, 条件より, $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\gamma+\gamma\alpha=3$ ………②

ここで, 方程式①に対して, 解と係数の関係より,

$$\alpha+\overline{\alpha}+\gamma=-p,\quad \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\gamma+\gamma\alpha=q,\quad \alpha\overline{\alpha}\gamma=-r$$

②より, $p=-(\alpha+\overline{\alpha})-\gamma$, $q=3$, $r=-\alpha\overline{\alpha}\gamma$ ………③

さて, 複素数平面上において, 2 点 α, $\overline{\alpha}$ は実軸対称であり, 条件から 3 点 α, $\overline{\alpha}$, γ が 1 辺 $\sqrt{3}$ の正三角形の頂点となるので, 右図より,



$$\alpha=\gamma+\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \alpha=\gamma-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

すると, ②を $\alpha\overline{\alpha}+\gamma(\alpha+\overline{\alpha})=3$ ……④と変形して,

(i)　$\alpha=\gamma+\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき

④より, $\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\gamma\cdot 2\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)=3$, $3\gamma^2+6\gamma=0$

$\gamma=0$ のとき $\alpha=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり, ③より $(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ 0)$

$\gamma=-2$ のとき $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり, ③より $(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 2)$

(ii)　$\alpha=\gamma-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき

④より, $\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\gamma\cdot 2\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)=3$, $3\gamma^2-6\gamma=0$

$\gamma=0$ のとき $\alpha=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり, ③より $(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 0)$

$\gamma=2$ のとき $\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり, ③より $(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ -2)$

[解 説]

昨年度のセンター試験に類題が出ています。現行課程で学んだ者にとっては, 4a よりかなり易しめです。