1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=-|2x-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を用いて，関数 $g(x)=-|2f(x)-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を考える。$0<c<1$ のとき，$g(x)=c$ を満たす x を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ は定数とし, $a>0$ とする。

(1)　曲線 $y=-ax^3+bx+c$ の接線で, 点 $(0,\ t)$ (t は実数)を通るものがただ 1 本存在することを示せ。

(2)　(1)の接線が正の傾きをもつための t の範囲を求めよ。

3 a

解答解説のページへ

a, b を正定数とし，平面ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2a,\ a)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 2b)$ を考える。線分 OB の中点を C とする。直線 OA, OB 上にない平面上の点 P に対し，点 P を通り，直線 OB に平行な直線と直線 OA との交点を Q とし，点 P を通り，直線 OA に平行な直線と直線 OB との交点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される。ただし，s, t は実数である。

(1)　k を正定数とするとき，$t=(s-k)^2$ を満たす点 P のなす曲線 F の方程式を求めよ。

(2)　直線 AC が F と接するとき, k の値を求めよ。

$\boxed{3\,\mathrm{b}}$

解答解説のページへ

サイレンを断続的に鳴らして 16 秒の信号を作る。ただし，サイレンは 1 秒または 2 秒鳴り続けて 1 秒休み，これをくり返す。また，信号はサイレンの音で始まり，サイレンの音で終わるものとする。

(1)　1 秒または 2 秒鳴り続ける回数をそれぞれ m 回，n 回とするとき，m，n の満たす関係式を求めよ。

(2)　信号は何通りできるか。

1

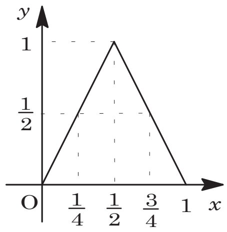
問題のページへ

$f(x)=-|2x-1|+1\ (0\leqq x\leqq 1)$から，

$0\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$のとき，$f(x)=(2x-1)+1=2x$

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$のとき，$f(x)=-(2x-1)+1=-2x+2$

よって，$y=f(x)$を図示すると，右図のようになる。



次に，$g(x)=-|2f(x)-1|+1\ (0\leqq x\leqq 1)$に対して，

$0\leqq x\leqq \dfrac{1}{4}$のとき，$f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$より，

$$g(x)=2f(x)=2\cdot 2x=4x$$

$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$のとき，$f(x)\geqq\dfrac{1}{2}$より，

$$g(x)=-2f(x)+2=-2\cdot 2x+2=-4x+2$$

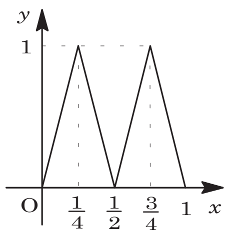
$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{4}$のとき，$f(x)\geqq\dfrac{1}{2}$より，

$$g(x)=-2f(x)+2=-2(-2x+2)+2=4x-2$$

$\dfrac{3}{4}\leqq x\leqq 1$のとき，$f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$より，

$$g(x)=2f(x)=2(-2x+2)=-4x+4$$

以上より，$y=g(x)$を図示すると，右図のようになる。



すると，$0<c<1$ のとき $g(x)=c$ の解は，$4x=c$，$-4x+2=c$，$4x-2=c$，$-4x+4=c$より，

$$x=\frac{c}{4},\ -\frac{c-2}{4},\ \frac{c+2}{4},\ -\frac{c-4}{4}$$

［解 説］

合成関数についての頻出問題です。内容的には数Ⅲなのですが。

2

問題のページへ

(1)　$y=-ax^3+bx+c$ より，$y'=-3ax^2+b$

接点$(k,\ -ak^3+bk+c)$とおくと，接線の方程式は，

$$y-(-ak^3+bk+c)=(-3ak^2+b)(x-k),\quad y=(-3ak^2+b)x+2ak^3+c$$

点$(0,\ t)$を通ることより，$t=2ak^3+c$ ………①

ここで，$f(k)=2ak^3+c$ とおくと，$f'(k)=6ak^2\geqq 0$

よって，$f(k)$は単調増加となり，①の実数解はただ 1 つ存在する。すなわち，点$(0,\ t)$を通る接線はただ 1 本だけ存在する。

(2)　接線が正の傾きをもつことより，$-3ak^2+b>0$ ………②

ここで，①と②を満たす k が存在する条件を求める。

①より，$k^3=\dfrac{t-c}{2a}$ なので，$k=\sqrt[3]{\dfrac{t-c}{2a}}$

②に代入して，$-3a\sqrt[3]{\left(\dfrac{t-c}{2a}\right)^2}+b>0$，$\sqrt[3]{\left(\dfrac{t-c}{2a}\right)^2}<\dfrac{b}{3a}$

$$\left(\frac{t-c}{2a}\right)^2<\left(\frac{b}{3a}\right)^3,\quad (t-c)^2<\frac{4b^3}{27a}$$

$a>0$ なので, $b\leqq 0$ のときは満たす t は存在しない。

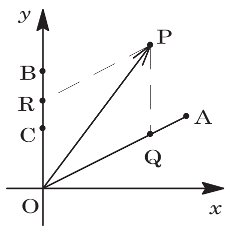
$b>0$ のときは，$-\sqrt{\dfrac{4b^3}{27a}}<t-c<\sqrt{\dfrac{4b^3}{27a}}$，$c-\dfrac{2b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{3a}}<t<c+\dfrac{2b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{3a}}$

［解 説］

(1)は 3 次曲線の接線の本数という頻出題ですが, (2)は t の存在しない場合があったりして，後味がスッキリしません。

$\boxed{3\ \mathrm{a}}$

問題のページへ



(1)　P$(x,\ y)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$より，

$$(x,\ y) = s(2a,\ a) + t(0,\ 2b)$$

$$x = 2as \cdots\cdots\cdots①,\quad y = as + 2bt \cdots\cdots\cdots②$$

①より$s = \dfrac{x}{2a}$，②に代入して$t = \dfrac{1}{2b}\left(y - \dfrac{x}{2}\right)$

条件より，$t = (s-k)^2$なので，$\dfrac{1}{2b}\left(y - \dfrac{x}{2}\right) = \left(\dfrac{x}{2a} - k\right)^2$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{b}{2a^2}(x - 2ak)^2,\quad y = \frac{b}{2a^2}x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2bk}{a}\right)x + 2bk^2 \cdots\cdots\cdots③$$

(2)　直線 AC の方程式は，$y = \dfrac{a-b}{2a}x + b \cdots\cdots\cdots④$

③と④の共有点は，$\dfrac{b}{2a^2}x^2 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2bk}{a}\right)x + 2bk^2 = \dfrac{a-b}{2a}x + b$

$$\frac{b}{2a^2}x^2 + \frac{b-4bk}{2a}x + 2bk^2 - b = 0$$

$b>0$ より，$x^2 + a(1-4k)x + 2a^2(2k^2-1) = 0$

③と④が接することより，$D = a^2(1-4k)^2 - 8a^2(2k^2-1) = 0$

$a>0$ より，$(1-4k)^2 - 8(2k^2-1) = 0$

これから$k = \dfrac{9}{8}$となり，この値は$k>0$を満たす。

［解 説］

大がかりな設定ですが，曲線Fの方程式も，Fと直線 AC が接する条件も簡単に求まります。

3 b

問題のページへ

(1)　1秒鳴るのが m 回, 2秒なるのが n 回とすると，休みは $m+n-1$ 回となるので,

$$m+2n+m+n-1=16,\ 2m+3n=17\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　(＊)を満たす 0 以上の整数 $(m,\ n)$ の組は，(＊)より $2m=17-3n\geqq 0$ なので, $n\leqq 5$ であり，さらに $17-3n$ が偶数なので n は奇数となり，$n=1,\ 3,\ 5$ である。

すると，$(m,\ n)=(7,\ 1),\ (4,\ 3),\ (1,\ 5)$ となる。

$(m,\ n)=(7,\ 1)$ のとき，信号は ${}_8C_7=8$ 通り，$(m,\ n)=(4,\ 3)$ のとき，信号は ${}_7C_4=35$ 通り，$(m,\ n)=(1,\ 5)$ のとき，信号は ${}_6C_1=6$ 通りとなる。

以上より，信号は $8+35+6=49$ 通りできる。

［解 説］

現実的にありそうな問題です。予想したより簡単に結論が導けます。