

1

解答解説のページへ

e を自然対数の底とする。 $e \leq p < q$ のとき, 不等式 $\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$ が成り立つことを証明せよ。

2

解答解説のページへ

閉区間 $[0, 2\pi]$ 上で定義された x の関数 $f(x) = \int_0^\pi \sin\left(|t-x| + \frac{\pi}{4}\right) dt$ の最大値および最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。

3

解答解説のページへ

$\triangle ABC$ の外心 (外接円の中心) O が三角形の内部にあるとし, α, β, γ は $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ を満たす正数であるとする。また, 直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする。

- (1) $\overrightarrow{OA}, \alpha, \beta, \gamma$ を用いて $\overrightarrow{OA'}$ を表せ。
- (2) $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ。

4a

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数とする。有限複素数列 z_1, z_2, \dots, z_n の各項はいずれも方程式 $z^6 = 1$ の解の 1 つであり、かつ関係式 $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$ を満たしているとする。

- (1) z_1, z_2, \dots, z_n の中に 1 が含まれ、 -1 が含まれていないとすれば、 $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,
 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも z_1, z_2, \dots, z_n の中に含まれることを示せ。
- (2) $n = 6$ のとき, (1) のような複素数列 z_1, z_2, \dots, z_6 のとり方の個数を求めよ。

4b

解答解説のページへ

数直線上の原点 O から出発して、硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える。毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$ 、裏が出れば -1 、それぞれ駒を進めるとする。ただし、点 -1 または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする。

- (1) k 回目に硬貨を投げた後、駒が点 1 にある確率を求めよ。
- (2) k 回目に硬貨を投げた後、駒がある点 X_k の期待値 $E[X_k]$ を求めよ。

1

問題のページへ

$f(x) = \log(\log x)$ とおくと, $f'(x) = \frac{1}{x \log x}$ となり, $p \leq x \leq q$ において平均値の定

理を適用すると,

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = f'(c) \quad (p < c < q)$$

ここで, $e \leq p < c$ より, $c \log c > e \log e = e$ なので,

$$f'(c) = \frac{1}{c \log c} < \frac{1}{e}$$

よって, $\frac{f(q) - f(p)}{q - p} < \frac{1}{e}$, $f(q) - f(p) < \frac{q - p}{e}$ より,

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q - p}{e}$$

[解説]

証明する不等式をみて, 平均値の定理に気付けば, 一瞬にして解決します。

2

問題のページへ

$0 \leq x \leq \pi$ のときと, $\pi \leq x \leq 2\pi$ のときに場合分けをする。

(i) $0 \leq x \leq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sin\left(-t + x + \frac{\pi}{4}\right) dt + \int_x^\pi \sin\left(t - x + \frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= \left[\cos\left(-t + x + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^x + \left[-\cos\left(t - x + \frac{\pi}{4}\right) \right]_x^\pi \\ &= \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5}{4}\pi - x\right) + \cos\frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} - 2\cos\frac{3}{4}\pi \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\sin x \end{aligned}$$

(ii) $\pi \leq x \leq 2\pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \sin\left(-t + x + \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[\cos\left(-t + x + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^\pi \\ &= \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

(i)(ii)より, $0 \leq x \leq \pi$ では最大値 $2\sqrt{2}$ ($x = \frac{\pi}{2}$), 最小値 $\sqrt{2}$ ($x = 0, \pi$) であり, また $\pi \leq x \leq 2\pi$ では最大値 $\sqrt{2}$ ($x = \pi$), 最小値 -2 ($x = \frac{7}{4}\pi$) である。

以上より, $f(x)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ ($x = \frac{\pi}{2}$), 最小値は -2 ($x = \frac{7}{4}\pi$) である。

[解説]

絶対値の付いた関数を積分するという頻出問題です。

3

問題のページへ

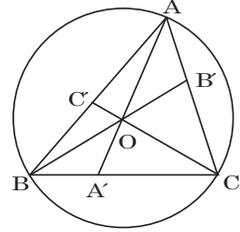
(1) $\vec{OA}' = k\vec{OA}$ とおくと, $\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} = \vec{0}$ より

$$\vec{OA}' = k \cdot \frac{-\beta\vec{OB} - \gamma\vec{OC}}{\alpha} = -k \left(\frac{\beta}{\alpha}\vec{OB} + \frac{\gamma}{\alpha}\vec{OC} \right)$$

点 A' は線分 BC 上にあるので,

$$-k \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = 1, \quad k = -\frac{-\alpha}{\beta + \gamma}$$

よって, $\vec{OA}' = -\frac{\alpha}{\beta + \gamma}\vec{OA} \dots\dots\dots ①$



(2) (1)と同様にして, $\vec{OB}' = -\frac{\beta}{\gamma + \alpha}\vec{OB} \dots\dots\dots ②$, $\vec{OC}' = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta}\vec{OC} \dots\dots\dots ③$

$\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致するとき, $|\vec{OA}'| = |\vec{OB}'| = |\vec{OC}'|$

①②③より, $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ なので,

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} |\vec{OA}| = \frac{\beta}{\gamma + \alpha} |\vec{OB}| = \frac{\gamma}{\alpha + \beta} |\vec{OC}|$$

条件より, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| \neq 0$ なので, $\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{\beta}{\gamma + \alpha} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$

よって, 正の数 l が存在して, $\alpha = l(\beta + \gamma), \beta = l(\gamma + \alpha), \gamma = l(\alpha + \beta)$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2l(\alpha + \beta + \gamma)$$

$\alpha + \beta + \gamma > 0$ より $l = \frac{1}{2}$ となるので,

$$2\alpha = \beta + \gamma \dots\dots\dots ④, \quad 2\beta = \gamma + \alpha \dots\dots\dots ⑤, \quad 2\gamma = \alpha + \beta \dots\dots\dots ⑥$$

④⑤より $\alpha = \beta$, ⑤⑥より $\beta = \gamma$, よって $\alpha = \beta = \gamma$ となる。

[解説]

ベクトルの基本問題です。(1)の誘導を利用すると,(2)の結論も簡単に導けます。

4a

問題のページへ

- (1) $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくと, $1, \alpha, \beta, -1, \bar{\beta}, \bar{\alpha}$ が $z^6 = 1$ の解となる。

さて, 有限数列 $\{z_n\}$ の中に, $1, \alpha, \beta, -1, \bar{\beta}, \bar{\alpha}$ が, それぞれ $a, b, c, 0, d, e$ 個ずつ含まれているとすると,

$$a + b + c + d + e = n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件より, $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$ なので,

$$a + \frac{1}{2}(b + e) - \frac{1}{2}(c + d) = 0, \quad 2a + b - c - d + e = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{2}d - \frac{\sqrt{3}}{2}e = 0, \quad b + c - d - e = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ より, } 2a + 2b - 2d = 0, \quad d = a + b \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より, } 2a - 2c + 2e = 0, \quad c = a + e \cdots \cdots \textcircled{5}$$

条件より, $a \geq 1, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0, e \geq 0$ なので, $\textcircled{4}\textcircled{5}$ から $c \geq 1, d \geq 1$ となり, β も $\bar{\beta}$ も少なくとも 1 個含まれる。

- (2) $n = 6$ のとき, $\textcircled{1}$ より $a + b + c + d + e = 6$

$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{ を代入して, } 3a + 2b + 2e = 6$$

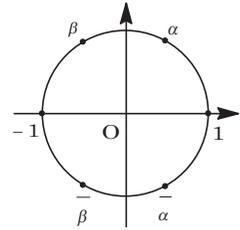
$a = 1$ のとき $2b + 2e = 3$ となり, この式を満たす (b, e) は存在しない。

$a = 2$ のとき $b + e = 0$ となり, この式を満たすのは $(b, e) = (0, 0)$ である。このとき, $\textcircled{4}\textcircled{5}$ より $c = d = 2$ となる。

すなわち, z_1, z_2, \dots, z_6 の中には, $1, \beta, \bar{\beta}$ が 2 個ずつ含まれているので, そのとり方は, $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ 個である。

[解説]

いかにも難問のような感じですが, $z^6 = 1$ の解を設定し, その個数について方程式を立てていくと, うまく解けます。



4b

問題のページへ

(1) k 回目に硬貨を投げた後、駒が点 $-1, 0, 1, 2, 3$ にある確率を、それぞれ a_k, b_k, c_k, d_k, e_k とおく。

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{k+1} = \frac{1}{2}c_k \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad c_{k+1} = \frac{1}{2}b_k + \frac{1}{2}d_k \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$d_{k+1} = \frac{1}{2}c_k \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad e_{k+1} = \frac{1}{2}d_k + e_k \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より}, \quad c_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c_{k-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c_{k-1} = \frac{1}{2}c_{k-1}$$

k が偶数のとき, $c_0 = 0$ なので $c_k = 0$

k が奇数のとき, $k = 2n - 1$ とおくと, $c_1 = \frac{1}{2}, c_{2n+1} = \frac{1}{2}c_{2n-1}$ より,

$$c_{2n-1} = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}}$$

(2) k が偶数 ($k = 2n$) のとき, (1)より $c_{2n} = 0$, $\textcircled{2}\textcircled{4}$ より $b_{2n+1} = d_{2n+1} = 0$ となる。

k が奇数 ($k = 2n - 1$) のとき, (1)より $c_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\textcircled{2}\textcircled{4}$ より $b_{2n} = d_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

となる。

すると, $\textcircled{1}$ より $a_{2n+1} = a_{2n} + \frac{1}{2}b_{2n} = a_{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \cdots \cdots \textcircled{6}$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + \frac{1}{2}b_{2n-1} = a_{2n-1} \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{6}\textcircled{7}$ より, $a_{2n+1} = a_{2n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

$a_1 = \frac{1}{2}$ なので, $n \geq 2$ において,

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+2} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{8} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$n = 1$ をあてはめると, $a_1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ となり成立する。

また $\textcircled{7}$ より, $a_{2n} = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

同様にして, $\textcircled{5}$ より, $e_{2n+1} = e_{2n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$, $e_1 = 0$ なので,

$n \geq 2$ において, $e_{2n-1} = 0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ($n = 1$ のときも成立)

さらに, $e_{2n} = e_{2n-1} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

すると, k が偶数 ($k = 2n$) のとき, 右表のようになり,

X_{2n}	-1	0	1	2	3
$P(X_{2n})$	$\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$E[X_{2n}] = -\left\{\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3\left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = 0$$

また, k が奇数
($k = 2n - 1$) のとき,
右表のようになり,

X_{2n-1}	-1	0	1	2	3
$P(X_{2n-1})$	$\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0	$\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$E[X_{2n-1}] = -\left\{\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = 0$$

以上より, k の偶奇にかかわらず, $E[X_k] = 0$ となる。

[解説]

ランダムウォークを題材にした頻出問題です。漸化式を立てて、ていねいに解いてみました。