1

解答解説のページへ

n を自然数とするとき，3 つの数 $a=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1$，$b=1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$，$c=\dfrac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

次のように円 C_n を定める。まず，C_0 は $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円，C_1 は $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円とする。次に C_0，C_1 に外接し x 軸に接する円を C_2 とする。さらに，$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ に対し，順に，C_0，C_{n-1} に外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする。$C_n\ (n\geqq 1)$ の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，2 つの円が外接するとは，中心間の距離がそれぞれ円の半径の和に等しいことをいう。

(1)　$n\geqq 1$ に対し，$b_n=\dfrac{{a_n}^2}{2}$ を示せ。

(2)　a_n を求めよ。

$\boxed{3}$ a

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上の 2 点 A, B に対し, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = t$ とおく。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $t = 2$ のとき, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ となる点 P の軌跡を求め, 図示せよ。

3b

解答解説のページへ

辺の長さがそれぞれ $AB=10$，$BC=6$，$AC=8$ の△ABC がある。辺 AB 上に点 P，辺 AC 上の点 Q を，△APQ の面積が△ABC の面積の $\dfrac{1}{2}$ になるようにとる。

(1)　2 辺の長さの和 $AP+AQ$ を u とおく。△APQ の周の長さ l を u を用いて表せ。

(2)　l が最小になるときの AP, AQ, l の値を求めよ。

1

問題のページへ

$1+a=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}$，$1-b=\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$，$c=\dfrac{1}{5n}$ より，

$$\left(1-\frac{1}{5n}\right)^5=1-{}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{5n}+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5n}\right)^2-{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5n}\right)^3+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{5n}\right)^4-\left(\frac{1}{5n}\right)^5$$
$$=1-\frac{1}{n}+10\left(\frac{1}{5n}\right)^2-10\left(\frac{1}{5n}\right)^3+5\left(\frac{1}{5n}\right)^4-\left(\frac{1}{5n}\right)^5$$

$$(1-c)^5-(1-b)^5=\left(1-\frac{1}{5n}\right)^5-\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$=10\left(\frac{1}{5n}\right)^2-10\left(\frac{1}{5n}\right)^3+5\left(\frac{1}{5n}\right)^4-\left(\frac{1}{5n}\right)^5$$
$$=10\left(\frac{1}{5n}\right)^2\left(1-\frac{1}{5n}\right)+4\left(\frac{1}{5n}\right)^4+\left(\frac{1}{5n}\right)^4\left(1-\frac{1}{5n}\right)$$
$$>0$$

よって，$(1-c)^5>(1-b)^5$ となり，$1-c>0$，$1-b>0$ より，

$$1-c>1-b,\ b>c$$

また，$\left(1+\dfrac{1}{5n}\right)^5=1+{}_5\mathrm{C}_1\dfrac{1}{5n}+{}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{5n}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{5n}\right)^3+{}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{5n}\right)^4+\left(\dfrac{1}{5n}\right)^5$

$$=1+\frac{1}{n}+10\left(\frac{1}{5n}\right)^2+10\left(\frac{1}{5n}\right)^3+5\left(\frac{1}{5n}\right)^4+\left(\frac{1}{5n}\right)^5$$

$$(1+c)^5-(1+a)^5=\left(1+\frac{1}{5n}\right)^5-\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=10\left(\frac{1}{5n}\right)^2+10\left(\frac{1}{5n}\right)^3+5\left(\frac{1}{5n}\right)^4+\left(\frac{1}{5n}\right)^5$$
$$>0$$

よって，$(1+c)^5>(1+a)^5$ となり，$1+c>0$，$1+a>0$ より，

$$1+c>1+a,\ c>a$$

以上より，$b>c>a$

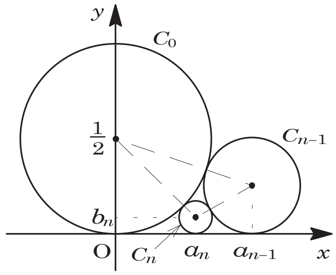
［解 説］

まず，$n=1$ を代入して，大小関係を推測してから，計算にとりかかりました。

2

問題のページへ

(1)　円C_nの半径はb_nなので，円C_0とC_nが外接することより，



$$\left(\frac{1}{2}+b_n\right)^2=\left(\frac{1}{2}-b_n\right)^2+a_n{}^2$$

$$\frac{1}{4}+b_n+b_n{}^2=\frac{1}{4}-b_n+b_n{}^2+a_n{}^2$$

$2b_n=a_n{}^2$より，$b_n=\dfrac{a_n{}^2}{2}$

(2)　円C_nとC_{n-1}が外接することより，

$$(b_{n-1}+b_n)^2=(b_{n-1}-b_n)^2+(a_{n-1}-a_n)^2$$

$$b_{n-1}{}^2+2b_{n-1}b_n+b_n{}^2=b_{n-1}{}^2-2b_{n-1}b_n+b_n{}^2+(a_{n-1}-a_n)^2$$

$$(a_{n-1}-a_n)^2-4b_{n-1}b_n=0$$

(1)より，$(a_{n-1}-a_n)^2-a_{n-1}{}^2a_n{}^2=0$

$$(a_{n-1}-a_n+a_{n-1}a_n)(a_{n-1}-a_n-a_{n-1}a_n)=0$$

ここで，$a_n<a_{n-1}$なので，$a_{n-1}-a_n+a_{n-1}a_n>0$

$$a_{n-1}-a_n-a_{n-1}a_n=0,\quad a_n=\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$$

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{a_{n-1}}+1$より，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)\cdot 1=1+n-1=n$

以上より，$a_n=\dfrac{1}{n}$

［解　説］

よく見かける構図の問題です。三平方の定理が鍵です。

3a　　問題のページへ

(1)　$\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ a^2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b,\ b^2)$ より，

$$t=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=ab+a^2b^2=\left(ab+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

ab は任意の値をとるので，$t\geqq-\dfrac{1}{4}$

(2)　$t=2$ のとき，$a^2b^2+ab-2=0$，$(ab+2)(ab-1)=0$

よって，$ab=-2$ または $ab=1$

ここで，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$x=a+b,\quad y=a^2+b^2$$

(i)　$ab=-2$ のとき　$x=a-\dfrac{2}{a}$，$y=a^2+\dfrac{4}{a^2}$

$a^2+\dfrac{4}{a^2}=\left(a-\dfrac{2}{a}\right)^2+4$ より，$y=x^2+4$

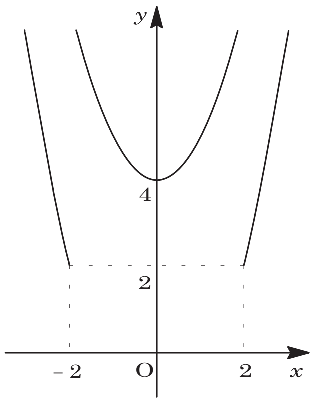
なお, x はすべての値をとりうる。

(ii)　$ab=1$ のとき　$x=a+\dfrac{1}{a}$，$y=a^2+\dfrac{1}{a^2}$

$a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2$ より，$y=x^2-2$

ただし，$a>0$ のとき $a+\dfrac{1}{a}\geqq2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$，また $a<0$ のとき $-a-\dfrac{1}{a}\geqq2\sqrt{-a\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)}=2$ より，$a+\dfrac{1}{a}\leqq-2$ となるので，$x\leqq-2$，$2\leqq x$ である。

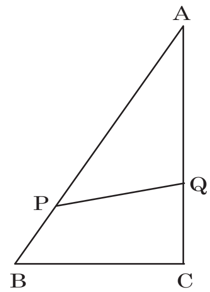
(i)(ii)より，点 P の軌跡は右図のようになる。



［解 説］

軌跡についての基本的な問題ですが, その限界が現れる点に注意が必要です。

$\boxed{3b}$ 問題のページへ



(1)　$\triangle$ABC は $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形なので,

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$$

また, $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos A=\frac{4}{5}$ で, $\mathrm{AP}=p$, $\mathrm{AQ}=q$ とすると,

$$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}pq\sin A=\frac{3}{10}pq$$

条件より, $\frac{3}{10}pq=24\times\frac{1}{2}$, $pq=40$ ………(＊)

さて, $\triangle$APQ に余弦定理を適用すると, (＊)より,

$$\mathrm{PQ}^2=p^2+q^2-2pq\cos A=(p+q)^2-2pq-\frac{8}{5}pq$$

$$=u^2-\frac{18}{5}\cdot 40=u^2-144$$

よって, $l=p+q+\mathrm{PQ}=u+\sqrt{u^2-144}$

(2)　(1)より, l は u についての増加関数なので, u の値が最小になるとき l も最小になり, (＊)より,

$$u=p+q\geqq 2\sqrt{pq}=2\sqrt{40}=4\sqrt{10}$$

等号成立は $p=q=2\sqrt{10}$ のとき, すなわち $\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=2\sqrt{10}$ のときである。

このとき, l は最小値 $4\sqrt{10}+\sqrt{(4\sqrt{10})^2-144}=4\sqrt{10}+4$ をとる。

［解 説］

本問も有名問題です。$\triangle$ABC が直角三角形なので, 計算が少し簡単になります。