1

解答解説のページへ

(1)　xを正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$と$\dfrac{1}{x+1}$の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$の大小を比較せよ。

2

解答解説のページへ

a, b を正数とし，xy 平面で不等式 $\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ の表す領域 D と，不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ の表す領域 E を考える。

(1)　$a=2$, $b=1$ の場合に，領域 D を図示せよ。

(2)　D が E に含まれるための a, b の条件を求め，ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)$を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で $0<f(x)<1$ を満たすものとする。$a_1=1$ とし，順に，$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx\ (m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ により数列 $\{a_m\}$ を定める。

(1)　$m\geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であり，かつ $a_1>a_2>\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots$ となることを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{2002}>a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ。

4 a

解答解説のページへ

関係式 $x^a = y^b = z^c = xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする。

$\boxed{4\ \mathrm{b}}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，偏角θは，$0° \leqq \theta < 360°$の範囲で考えるものとする。

(1)　$|z+i|=|z-i|$を満たす複素数zは，実数に限ることを示せ。

(2)　複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数$z+i$の偏角$\arg(z+i)$の動く範囲を求めよ。

(3)　z を未知数とする方程式$(z+i)^9=(z-i)^9$のすべての解 z について$z+i$の偏角$\arg(z+i)$を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと,

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

$f(x)$ は $x>0$ において単調減少で, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より, $f(x)>0$

よって, $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2)　$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと, (1)より,

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

よって, $g(x)$ は $x>0$ において単調増加である。

すると, $\dfrac{2001}{2002}<\dfrac{2002}{2001}$ より, $g\left(\dfrac{2001}{2002}\right)<g\left(\dfrac{2002}{2001}\right)$ となるので,

$$\log\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\log\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$$

したがって, $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

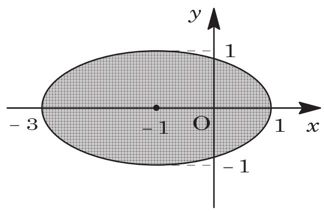
［解 説］

(2)において $g(x)$ を設定するところがポイントです。 $g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ または $g(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ でしょうが, 前者の方が(1)と相性がよさそうです。

2

問題のページへ

(1) 不等式 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2 \leqq 1$ の表す領域は，楕円 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2=1$ の内部または周上となり，右図の網点部となる。ただし，境界は含む。



(2) $D:\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ が $E:x^2+y^2\leqq 1$ に含まれるための条件は，D の境界線上の任意の点 $(1-a+a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ が E に含まれることより，

$$(1-a+a\cos\theta)^2+b^2\sin^2\theta\leqq 1,\ (1-a+a\cos\theta)^2+b^2(1-\cos^2\theta)\leqq 1$$

$$(b^2-a^2)\cos^2\theta-2a(1-a)\cos\theta-a^2+2a-b^2\geqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\cos\theta=t$，$f(t)=(b^2-a^2)t^2-2a(1-a)t-a^2+2a-b^2$ とおくと，$(*)$ は $-1\leqq t\leqq 1$ において $f(t)\geqq 0$ である条件と同値である。

さて，$f(1)=0$ に注目すると，$f(t)=(t-1)\{(b^2-a^2)t+a^2-2a+b^2\}$

(i) $b^2-a^2>0\ (b>a)$ のとき

求める条件は，$t=-\dfrac{a^2-2a+b^2}{b^2-a^2}\geqq 1$，$a^2-2a+b^2\leqq -b^2+a^2$

$b^2\leqq a$ より，$b\leqq\sqrt{a}$

(ii) $b^2-a^2=0\ (b=a)$ のとき

$f(t)=(t-1)(2a^2-2a)$ となり，求める条件は，$2a^2-2a\leqq 0$ より，$0\leqq a\leqq 1$

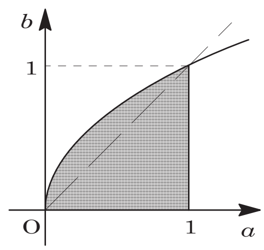
(iii) $b^2-a^2<0\ (b<a)$ のとき

求める条件は，$t=-\dfrac{a^2-2a+b^2}{b^2-a^2}\leqq -1$

$$a^2-2a+b^2\leqq b^2-a^2$$

$2a^2-2a\leqq 0$ より，$0\leqq a\leqq 1$

(i)(ii)(iii)より，求める a,b の条件は，ab 平面上で右図の網点部のようになる。ただし，a 軸上以外の境界は含む。



［解 説］

(2)では $f(1)=0$ に注目することが最大の鍵です。これは，図を書けばわかります。

3

問題のページへ

(1)　$m \geqq 2$ のとき，$a_m > 0$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$m = 2$ のとき

$a_1 = 1$ より，$a_2 = \int_0^1 f(x)\,dx$ となり，$f(x) > 0$ より $a_2 > 0$ である。

(ii)　$m = k$ のとき

$a_k > 0$ と仮定すると，$f(x) > 0$ より $a_{k+1} = \int_0^{a_k} f(x)\,dx > 0$ である。

(i)(ii)より，$m \geqq 2$ のとき，$a_m > 0$ である。

次に，$a_{m-1} - a_m = \int_0^{a_{m-1}} dx - \int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx = \int_0^{a_{m-1}} \{1 - f(x)\}\,dx$

$f(x) < 1$ より，$1 - f(x) > 0$ なので，$a_{m-1} > a_m$ である。すると，m は任意の整数より，$a_1 > a_2 > \cdots > a_{m-1} > a_m > \cdots$ となる。

(2)　(1)より，$0 < \cdots < a_m < a_{m-1} < \cdots < a_2 < a_1 = 1$ となるが，ここで，どんな m に対しても $a_m \geqq \dfrac{1}{2002}$ と仮定する。

さて，条件より，$f(x)$ は連続関数で，$x > 0$ において $0 < f(x) < 1$ を満たすので，$0 \leqq f(0) \leqq 1$ となる。

(i)　$0 \leqq f(0) < 1$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M_1 とすると，$0 < M_1 < 1$ である。

$$a_m = \int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx \leqq \int_0^{a_{m-1}} M_1\,dx = M_1 a_{m-1},\quad 0 < a_m \leqq a_1 {M_1}^{m-1} = {M_1}^{m-1}$$

これより $\displaystyle\lim_{m \to \infty} a_m = 0$ となり，どんな m に対しても $a_m \geqq \dfrac{1}{2002}$ とはならない。

(ii)　$f(0) = 1$ のとき

$0 < \alpha < \dfrac{1}{2002}$ を満たす実数 α をとるとき，$0 \leqq x \leqq \alpha$ における $f(x)$ の最大値は 1 である。また $\alpha \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M_2 とすると，$0 < M_2 < 1$ である。

$$a_m = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{a_{m-1}} f(x)\,dx \leqq \int_0^{\alpha} dx + \int_{\alpha}^{a_{m-1}} M_2\,dx = \alpha + M_2(a_{m-1} - \alpha)$$

$$a_m - \alpha \leqq M_2(a_{m-1} - \alpha),\quad 0 < a_m - \alpha \leqq (a_1 - \alpha){M_2}^{m-1} = (1 - \alpha){M_2}^{m-1}$$

これより $\displaystyle\lim_{m \to \infty} a_m = \alpha$ となり，どんな m に対しても $a_m \geqq \dfrac{1}{2002}$ とはならない。

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{2002} > a_m$ となる m が存在する。

［解　説］

最初はうっかり $f(0) = 1$ の場合を見逃していました。これが最重点課題だったのですが……。

$\boxed{4\ \mathrm{a}}$

問題のページへ

$x^a=y^b=z^c=xyz\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ より，$\log x^a=\log y^b=\log z^c=\log xyz$

$$a\log x=b\log y=c\log z=\log x+\log y+\log z$$

ここで，$\log x=X$，$\log y=Y$，$\log z=Z$ とおくと，$x\neq 1$，$y\neq 1$，$z\neq 1$ から，

$$aX=bY=cZ=X+Y+Z\ (X\neq 0,\ Y\neq 0,\ Z\neq 0)$$

$$aX=bY\cdots\cdots①,\ aX=cZ\cdots\cdots②,\ aX=X+Y+Z\cdots\cdots③$$

①より $Y=\frac{a}{b}X$，②より $Z=\frac{a}{c}X$，③に代入して，$aX=X+\frac{a}{b}X+\frac{a}{c}X$

$X\neq 0$ より，$a=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\cdots\cdots\cdots④$

さて，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ より，$\frac{1}{a}\geqq\frac{1}{b}\geqq\frac{1}{c}>0$ となり，④から $\frac{3}{a}\geqq 1$，$a\leqq 3$ である。また，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1-\frac{1}{a}>0$ より $a>1$ となる。よって，$a=2,\ 3$ である。

(i)　$a=2$ のとき　④より $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{b}\geqq\frac{1}{c}>0$ より $\frac{2}{b}\geqq\frac{1}{2}$ から $b\leqq 4$ で，$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{b}>0$ から $b>2$ となる。

$b=3$ のとき $\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$ より $c=6$，また $b=4$ のとき $\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$ より $c=4$ である。

(ii)　$a=3$ のとき　④より $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{b}\geqq\frac{1}{c}>0$ より $\frac{2}{b}\geqq\frac{2}{3}$ から $b\leqq 3$ で，$3=a\leqq b$ より $b=3$ となる。

このとき，$\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$ より $c=3$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

［解　説］

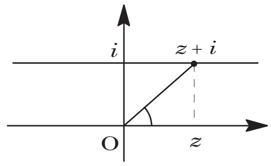
対数をとって変形をしていけば，④というよく見かける不定方程式が現れてきます。

$\boxed{4\ \text{b}}$

問題のページへ

(1)　$|z+i|=|z-i|$ より，複素数平面上で，点 z は 2 点 i，$-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち実軸上にある。よって，z は実数である。

(2)　z が実数のとき，点 $z+i$ は点 i を通り，実軸に平行な直線上にあるので，



$$0° < \arg(z+i) < 180°$$

(3)　$(z+i)^9=(z-i)^9$ より，$|z+i|^9=|z-i|^9$

$$|z+i|=|z-i|$$

よって，(1)より，z は実数となる。

また，n を整数として，$\arg(z+i)^9=360°\times n+\arg(z-i)^9$

$$9\arg(z+i)=360°\times n+9\arg(z-i),\quad \arg(z+i)=40°\times n+\arg(z-i)$$

ここで，z が実数より，$z-i=\overline{z+i}$ となり，$\arg(z-i)=-\arg(z+i)$ から，

$$2\arg(z+i)=40°\times n,\quad \arg(z+i)=20°\times n$$

(2)より，$0° < \arg(z+i) < 180°$ なので，

$$\arg(z+i)=20°,\ 40°,\ 60°,\ 80°,\ 100°,\ 120°,\ 140°,\ 160°$$

［解　説］

(1)と(2)が，(3)のための親切な誘導となっています。そのため，方針について迷う必要は全くありません。