1

解答解説のページへ

△OAB の頂角∠O の二等分線と辺 AB との交点を P，点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする。以下では，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。

(1) P は線分 AB を$|\vec{a}|:|\vec{b}|$に内分する点であることを証明せよ。

(2) 線分の長さ OQ を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

放物線 $C: y = ax^2$ $(a>0)$ を考える。放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p \neq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とする。直線 l と放物線 C で囲まれる図形の面積を $S(\mathrm{P})$ とする。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 点 P を $p>0$ の範囲で動かす。$S(\mathrm{P})$ が最小となるときの，直線 l の傾き m と $S(\mathrm{P})$ を求めよ。

3a

解答解説のページへ

n を自然数とするとき, $m \leqq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする。

(1) $f(15)$ を求めよ。

(2) p, q を互いに異なる素数とする。このとき $f(pq)$ を求めよ。

3b

解答解説のページへ

1 つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている。この箱から k 枚$(3 \leqq k \leqq 12)$のカードを同時に取り出す。このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする。

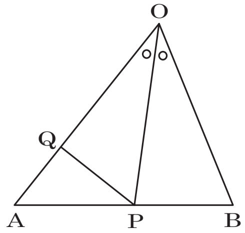
(1)　$p(k)$ を求めよ。

(2)　$4 \leqq k \leqq 12$ のとき，$f(k)=\dfrac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ。

(3)　$p(k)$ を最大にする k の値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　まず，$\triangle\mathrm{OAP} : \triangle\mathrm{OBP} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB}$ ………①

また，$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{BOP} = \theta$ とおくと，

$$\triangle\mathrm{OAP} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{OBP} = \frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta$$

よって，$\triangle\mathrm{OAP} : \triangle\mathrm{OBP} = \mathrm{OA} : \mathrm{OB}$ ………②

①②より，$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{OA} : \mathrm{OB}$

したがって, P は線分 AB を$|\vec{a}| : |\vec{b}|$に内分する点である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\vec{a}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a} = 0$ となり，

$$(k\vec{a} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\vec{a} = 0,\ k|\vec{a}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a},\ k = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2} \text{………③}$$

(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}\left\{|\vec{b}||\vec{a}|^2 + |\vec{a}|(\vec{a}\cdot\vec{b})\right\} = \frac{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \text{………④}$$

③④より，$k = \dfrac{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} = \dfrac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)}$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |k\vec{a}| = |k||\vec{a}| = \dfrac{\left||\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$

ここで，$|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|(1 + \cos 2\theta) > 0$ なので,

$$\mathrm{OQ} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$

［解 説］

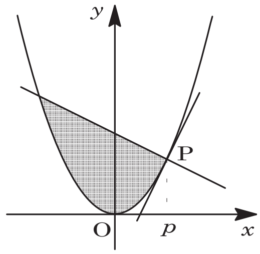
(2)ではいろいろな解法が思い浮かんだため，どれを採用しようかと迷ってしまい，ブリュダンの驢馬のような状態になってしまいました。結局，最もありふれた解法に落ち着きましたが……。

2

問題のページへ

(1)　$y = ax^2$ ……①より，$y' = 2ax$

点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ における接線の傾きは $y' = 2ap$ より，直線 l は傾きが $-\dfrac{1}{2ap}$ となり，その方程式は，



$$y - ap^2 = -\frac{1}{2ap}(x-p)$$

$$y = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2 \text{ ………②}$$

(2)　①②の交点は，$ax^2 = -\dfrac{1}{2ap}x + \dfrac{1}{2a} + ap^2$

$$ax^2 + \frac{1}{2ap}x - p\left(\frac{1}{2ap} + ap\right) = 0,\ (x-p)\left(ax + \frac{1}{2ap} + ap\right) = 0$$

$x = p$，$-\dfrac{1}{2a^2p} - p$ となり，$-\dfrac{1}{2a^2p} - p = \alpha$ とおくと，$p > 0$ から $\alpha < p$ であり，

$$S(\mathrm{P}) = \int_\alpha^p \left(-\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2 - ax^2\right)dx = -a\int_\alpha^p (x-\alpha)(x-p)\,dx$$

$$= \frac{a}{6}(p-\alpha)^3 = \frac{a}{6}\left(2p + \frac{1}{2a^2p}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$2p + \frac{1}{2a^2p} \geqq 2\sqrt{2p\cdot\frac{1}{2a^2p}} = \frac{2}{a}$$

なお，等号は $2p = \dfrac{1}{2a^2p}$，$p^2 = \dfrac{1}{4a^2}$，すなわち $p = \dfrac{1}{2a}$ のときに成立する。

よって，$S(\mathrm{P})$ の最小値は $\dfrac{a}{6}\left(\dfrac{2}{a}\right)^3 = \dfrac{4}{3a^2}$ であり，このとき直線 l の傾き m は，

$$m = -\frac{1}{2a\cdot\frac{1}{2a}} = -1 \text{ となる。}$$

［解 説］

面積の最小値を相加平均と相乗平均を用いて求めるという典型問題の 1 つです。以前，同じ構図の問題を模試のために作った記憶があります。

3a　問題のページへ

(1)　$m \leqq 15 = 3\times 5$ で, m と 15 の最大公約数が 1 であるのは,

$$m = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$$

よって，$f(15) = 8$ である。

(2)　p, q を互いに異なる素数とするとき，1 から pq までの整数で，p の倍数の個数は q 個, q の倍数の個数は p 個, pq の倍数の個数は 1 個より, p の倍数または q の倍数の個数は $p+q-1$ 個となる。

すると，$m \leqq pq$ で，m と pq の最大公約数が 1 である m の個数は，1 から pq までの整数の個数から, p の倍数または q の倍数の個数を引いたものであるので,

$$f(pq) = pq-(p+q-1) = (p-1)(q-1)$$

［解 説］

読解力が試される問題です。見た目は難しいのですが，内容は基本的です。

3b

問題のページへ

(1)　異なる 40 枚のカードから k 枚を取り出すとき，${}_{40}\mathrm{C}_k$ 通りの場合がある。

この中で，3 枚が同じ数で，残り $k-3$ 枚が異なる数である場合を数える。まず,同じ数の選び方は 10 通りで，その 3 枚のカードの取り出し方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通りずつある。次に，異なる数の選び方は ${}_9\mathrm{C}_{k-3}$ 通りで，その $k-3$ 枚のカードの取り出し方が，それぞれの数で 4 通りずつあることから 4^{k-3} 通りである。

これより, 3 枚が同じ数で，残り $k-3$ 枚が異なる数である確率は,

$$p(k)=\frac{10\times{}_4\mathrm{C}_3\times{}_9\mathrm{C}_{k-3}\times4^{k-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_k}=\frac{40\times{}_9\mathrm{C}_{k-3}\times4^{k-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_k}$$

$$=\frac{40\cdot\dfrac{9!}{(k-3)!(12-k)!}\cdot4^{k-3}}{\dfrac{40!}{k!(40-k)!}}=\frac{9!(40-k)!k(k-1)(k-2)4^{k-3}}{39!(12-k)!}$$

(2)　$p(k-1)=\dfrac{9!(41-k)!(k-1)(k-2)(k-3)4^{k-4}}{39!(13-k)!}$ より,

$$f(k)=\frac{p(k-1)}{p(k)}=\frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)}$$

(3)　$f(k)=\dfrac{p(k-1)}{p(k)}>1$ とすると, (2)より，$\dfrac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)}>1$

$4\leqq k\leqq12$ より，$(41-k)(k-3)>4k(13-k)$，$3k^2-8k-123>0$ ………(＊)

ここで，$g(k)=k(3k-8)$ とおくと，$g(7)=91$，$g(8)=128$ より，(＊)を満たす 4 以上の自然数 k の条件は, $k\geqq8$ である。

よって，$8\leqq k\leqq12$ のとき $p(k-1)>p(k)$ となり，また，これから $4\leqq k\leqq7$ のとき $p(k-1)<p(k)$ となるので,

$$p(3)<p(4)<\cdots<p(6)<p(7)>p(8)>\cdots>p(12)$$

したがって，$k=7$ のとき，$p(k)$ は最大となる。

[解 説]

確率の最大値を求める有名問題です。解の流れは明快ですが, 計算量を考えると, 前問を選択したほうがベターです。