1

解答解説のページへ

サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし, 8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し, 8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば, 7 の位置で 3 が出た場合, 8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお, サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて, サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_3 を求めよ。

(3)　p_4 を求めよ。

2

解答解説のページへ

aを実数とする。$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$について以下の問いに答えよ。

(1)　関数$y=f(x)$が極値をもつaの範囲を求めよ。

(2)　関数$y=f(x)$が極値をもつaに対して，関数$y=f(x)$は$x=p$で極大値，$x=q$で極小値をとるとする。関数$y=f(x)$のグラフ上の2点$\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$を結ぶ直線の傾きmをaを用いて表せ。

3

解答解説のページへ

iを虚数単位とする。$z_1=3$および$z_{n+1}=(1+i)z_n+i\ (n\geqq 1)$によって定まる複素数からなる数列$\{z_n\}$について，以下の問いに答えよ。

(1)　z_nを求めよ。

(2)　すべての正の整数mについて，$z_{8m-7}=2^{4m-2}-1$となることを示せ。

(3)　複素数z_nが表す複素数平面の点をP_nとする。P_n，P_{n+1}，P_{n+2}を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　サイコロを 2 回投げて 8 に進むとき, 1 回目と 2 回目に出る数の組合せは,

$(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$

よって，$p_2=\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$

(2)　サイコロを 1 回投げて 8 に進む場合はないので，$p_1=0$ である。

また, サイコロを 2 回投げてゴールに移動していないとき, その位置を k とすると $2\leqq k\leqq 7$ なので, 3 回目に $8-k$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-k$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_3=(1-p_2)\times\frac{1}{6}=\frac{31}{36}\times\frac{1}{6}=\frac{31}{216}$$

(3)　(2)と同様に考えて, サイコロを 3 回投げてゴールに移動していないとき, その位置を l とすると $3\leqq l\leqq 7$ なので, 4 回目に $8-l$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-l$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_4=(1-p_2-p_3)\times\frac{1}{6}=\frac{155}{216}\times\frac{1}{6}=\frac{155}{1296}$$

［解　説］

サイコロを 2 回以上投げたとき, 0 や 1 に移動している可能性はありません。つまり, あと 1 回投げてゴールに進むことができるわけです。この状況の把握がポイントです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ より，$f'(x)=3x^2+2ax+(3a-6)$

$y=f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことなので，

$$D/4=a^2-3(3a-6)=a^2-9a+18>0$$

$(a-3)(a-6)>0$ より，$a<3$，$6<a$

(2) $f'(x)=0$ の異なる 2 実数解が $x=p$，q $(p<q)$ なので，

$$p+q=-\frac{2}{3}a\,,\ \ pq=\frac{3a-6}{3}=a-2\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾きが m より, $(*)$から,

$$m=\frac{f(p)-f(q)}{p-q}=\frac{(p^3-q^3)+a(p^2-q^2)+(3a-6)(p-q)}{p-q}$$

$$=(p^2+pq+q^2)+a(p+q)+(3a-6)$$

$$=(p+q)^2-pq+a(p+q)+(3a-6)$$

$$=\frac{4}{9}a^2-a+2-\frac{2}{3}a^2+3a-6=-\frac{2}{9}a^2+2a-4$$

［解 説］

定積分を利用する有名な解法もありますが，ここでは普通に解きました。なお，今年は阪大・文系で類題が出ています。

3

問題のページへ

(1)　$z_{n+1}=(1+i)z_n+i$ より，$z_{n+1}+1=(1+i)(z_n+1)$

$$z_n+1=(z_1+1)(1+i)^{n-1}=4(1+i)^{n-1}$$

よって，$z_n=4(1+i)^{n-1}-1$

(2)　(1)より，$z_{8m-7}=4(1+i)^{8m-8}-1$

ここで，$1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$ なので，

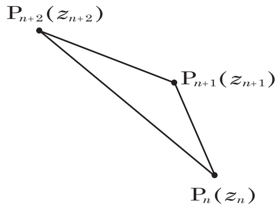
$$\begin{aligned}(1+i)^{8m-8}&=(\sqrt{2})^{8m-8}\{\cos(45^\circ\times(8m-8))+i\sin(45^\circ\times(8m-8))\}\\&=2^{4m-4}\{\cos(360^\circ\times(m-1))+i\sin(360^\circ\times(m-1))\}=2^{4m-4}\end{aligned}$$

よって，$z_{8m-7}=4\cdot 2^{4m-4}-1=2^{4m-2}-1$

(3)　(1)より，$z_{n+1}-z_n=\{4(1+i)^n-1\}-\{4(1+i)^{n-1}-1\}=4i(1+i)^{n-1}$ となり，

$$|z_{n+1}-z_n|=4|i||1+i|^{n-1}=4(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n+3}$$

同様にして，$|z_{n+2}-z_{n+1}|=(\sqrt{2})^{n+4}$



また，$\arg\dfrac{z_n-z_{n+1}}{z_{n+2}-z_{n+1}}=\arg\dfrac{-4i(1+i)^{n-1}}{4i(1+i)^n}=\arg\dfrac{-1}{1+i}$

$$=180^\circ-45^\circ=135^\circ$$

よって，$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}(\sqrt{2})^{n+3}(\sqrt{2})^{n+4}\sin 135^\circ=2^{-1}\cdot 2^{\frac{n+3}{2}}\cdot 2^{\frac{n+4}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}=2^{n+2}$$

［解 説］

(3)では，求めやすい P_{n+1} と P_n の距離を計算し，それを利用して P_{n+2} と P_{n+1} の距離を求めました。すると，$\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ の大きさがわかれば一件落着です。