1

解答解説のページへ

サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし, 8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し, 8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば, 7 の位置で 3 が出た場合, 8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお, サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて, サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_3 を求めよ。

(3)　4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b, c を実数とし，実数の組$(x,\ y,\ z)$に関する方程式

(i)　$x+y-2z=3a$，$2x-y-z=3b$，$x-5y+4z=3c$

および

(ii)　$x^2+y^2+z^2=1$

を考える。

(1)　方程式(i)が解をもつための $a,\ b,\ c$ に対する条件を求めよ。またそのときの方程式(i)の解$(x,\ y,\ z)$を求めよ。

(2)　方程式(i)と(ii)がただ 1 つの共通解をもつとき，その共通解$(x,\ y,\ z)$は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ を満たすことを示せ。

3

解答解説のページへ

多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

を満たすとする。

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

4a

解答解説のページへ

C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a，a，$2a$ の円とする。いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ。

4b

解答解説のページへ

正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列$\{x_n\}$を$x_1=x_2=1$，$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ で定める。このときすべての正の整数 n に対してx_{n+1}とx_nが互いに素であることを示せ。

1

問題のページへ

(1) サイコロを 2 回投げて 8 に進むとき, 1 回目と 2 回目に出る数の組合せは,

$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$

よって, $p_2 = \dfrac{5}{6^2} = \dfrac{5}{36}$

(2) サイコロを 1 回投げて 8 に進む場合はないので, $p_1 = 0$ である。

また, サイコロを 2 回投げてゴールに移動していないとき, その位置を k とすると $2 \leqq k \leqq 7$ なので, 3 回目に $8-k$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-k$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_3 = (1-p_2)\times\frac{1}{6} = \frac{31}{36}\times\frac{1}{6} = \frac{31}{216}$$

(3) (2)と同様に考えて, サイコロを n 回 $(n \geqq 2)$ 投げてゴールに移動していないとき, その位置を l とすると $2 \leqq l \leqq 7$ なので, $n+1$ 回目に $8-l$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-l$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_{n+1} = (1-p_2-\cdots-p_{n-1}-p_n)\times\frac{1}{6}$$

これより, $1-6p_{n+1} = p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n\quad(n \geqq 2)$ ………①

$1-6p_n = p_2+\cdots+p_{n-1}\quad(n \geqq 3)$ ………②

①−②から, $p_n = -6p_{n+1}+6p_n$, $p_{n+1} = \dfrac{5}{6}p_n\quad(n \geqq 3)$

よって, $p_n = p_3\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3} = \dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$

［解 説］

サイコロを 2 回以上投げたとき, 0 や 1 に移動している可能性はありません。つまり, あと 1 回投げてゴールに進むことができるわけです。この状況の把握がポイントです。文系では(3)が p_4 になっています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$x+y-2z=3a$ ……①，$2x-y-z=3b$ ……②，$x-5y+4z=3c$ ……③に対して，

②より，$z=2x-y-3b$ ………④

④を①に代入して，$x+y-2(2x-y-3b)=3a$，$x-y=-a+2b$ ………⑤

④を③に代入して，$x-5y+4(2x-y-3b)=3c$，$x-y=\dfrac{4}{3}b+\dfrac{1}{3}c$ ………⑥

⑤⑥が解をもつ条件は，

$$-a+2b=\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}c,\ 3a-2b+c=0 \ \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦が成り立つとき，⑤と⑥は一致し，t を実数として，

$$x=t,\ y=t+a-2b$$

④より，$z=2t-(t+a-2b)-3b=t-a-b$

よって，$(x,\ y,\ z)=(t,\ t+a-2b,\ t-a-b)$ ………⑧

(2)　⑧を $x^2+y^2+z^2=1$ に代入すると，$t^2+(t+a-2b)^2+(t-a-b)^2-1=0$

$$3t^2-6bt+(2a^2-2ab+5b^2-1)=0 \ \cdots\cdots\cdots ⑨$$

t がただ 1 つ存在する条件は，$D/4=9b^2-3(2a^2-2ab+5b^2-1)=0$

$$2a^2-2ab+2b^2-1=0 \ \cdots\cdots\cdots ⑩$$

このとき，⑨の解は $t=b$ となるので，$(x,\ y,\ z)=(b,\ a-b,\ -a)$

すると，⑩より，$2x^2+2xy+2y^2=2b^2+2b(a-b)+2(a-b)^2$

$$=2a^2-2ab+2b^2=1$$

［解 説］

①，②，③を平面の方程式とみなし，その法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$ とおくと，$\overrightarrow{n_3}=-3\overrightarrow{n_1}+2\overrightarrow{n_2}$ から，$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$ が 1 次独立ではありません。この点が本問の背景となっています。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$n \geqq 0$ のとき，$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 0,\ 1$ のとき

$f_0(2\cos\theta) = 2 = 2\cos(0\cdot\theta)$，$f_1(2\cos\theta) = 2\cos(1\cdot\theta)$ より成立する。

(ii)　$n = k,\ k+1$ のとき

$f_k(2\cos\theta) = 2\cos k\theta$，$f_{k+1}(2\cos\theta) = 2\cos(k+1)\theta$ と仮定すると，

$$\begin{aligned} f_{k+2}(2\cos\theta) &= 2\cos\theta\, f_{k+1}(2\cos\theta) - f_k(2\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\cdot 2\cos(k+1)\theta - 2\cos k\theta \\ &= 2\{\cos(k+2)\theta + \cos k\theta\} - 2\cos k\theta = 2\cos(k+2)\theta \end{aligned}$$

よって，$n = k+2$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$　$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

(2)　$|x| \leqq 2$ より，$x = 2\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと，$f_n(x) = 0$ から，

$$2\cos n\theta = 0,\ n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}\quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

よって，$\theta = \dfrac{1}{n}\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ から，$x = 2\cos\dfrac{1}{n}\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$

x が最大になるのは，$k = 0$ のときで，最大値 x_n は $x_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2n}$ となる。

このとき，$I_n = \displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx = \int_{2\cos\frac{\pi}{2n}}^{2} f_n(x)\,dx$ に対して，$x = 2\cos\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{2n}}^{0} f_n(2\cos\theta)(-2\sin\theta)\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos n\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\}\,d\theta \\ &= 2\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2n}} \\ &= -\frac{2}{n+1}\cos\frac{n+1}{2n}\pi + \frac{2}{n-1}\cos\frac{n-1}{2n}\pi + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1} \\ &= -\frac{2}{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{2}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{n-1}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{4n}{(n+1)(n-1)}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \end{aligned}$$

(3)　(2)より，$n^2 I_n = \dfrac{4n^3}{(n+1)(n-1)}\sin\dfrac{\pi}{2n} - \dfrac{4n^2}{(n+1)(n-1)}$

$$= \frac{2\pi}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$n\to\infty$のとき，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\to 1$，$\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}}\to 1$より，

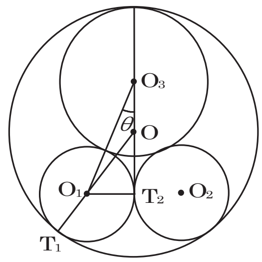
$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} n^2 I_n = 2\pi - 4$$

［解 説］

(2)において，θ の範囲を $0\leqq\theta\leqq\pi$ としても，一般性は失われません。ちょっとしたことですが，この後の論理がスムーズに進められます。

4a

問題のページへ



円C_1, C_2, C_3, C の中心を, それぞれ$\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$, O とおく。また, C_1と C, C_1とC_2の接点を, それぞれ$\mathrm{T_1}$, $\mathrm{T_2}$とおき, $\angle \mathrm{O_1O_3T_2}=\theta$ とすると,

$$\mathrm{OO_3}=1-2a\,,\ \mathrm{O_3O_1}=2a+a=3a\,,\ \mathrm{OO_1}=1-a$$

また, $\angle \mathrm{O_1T_2O_3}=90^\circ$ より $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{O_1T_2}}{\mathrm{O_1O_3}}=\dfrac{a}{3a}=\dfrac{1}{3}$ となり,

$$\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

そこで, $\triangle \mathrm{O_3O_1O}$ に余弦定理を適用すると,

$$(1-a)^2=(3a)^2+(1-2a)^2-2\cdot 3a(1-2a)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(6+4\sqrt{2})a^2-(1+2\sqrt{2})=0$$

$a>0$ から, $a=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

［解 説］

いろいろな解法が考えられますが, いずれにせよ, 2 円が接するとき, 中心間距離が半径の和や差に等しいことを利用します。

4b

問題のページへ

まず，x_n と b が互いに素であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$，2 のとき

$x_1=x_2=1$ より，x_1 と b，x_2 と b は互いに素である。

(ii)　$n=k$，$k+1$ のとき

x_k と b，x_{k+1} と b は互いに素であるとする。

ここで，x_{k+2} と b に 2 以上の公約数 g の存在を仮定すると，

$$x_{k+2}=gx'_{k+2},\ b=gb'\ （x'_{k+2} \text{と} b' \text{は整数}）$$

すると，$x_{k+2}=ax_{k+1}+bx_k$ から，$ax_{k+1}=g(x'_{k+2}-b'x_k)$………①

これより，ax_{k+1} は g の倍数となるが，条件より a と b は互いに素，また x_{k+1} と b も互いに素なので，①の成立はありえない。

よって，x_{k+2} と b には 2 以上の公約数 g が存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_n と b は互いに素である。

次に，x_n と b が互いに素であることを利用して，x_{n+1} と x_n が互いに素であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき

$x_1=x_2=1$ より，x_2 と x_1 は互いに素である。

(ii)　$n=l$ のとき

x_{l+1} と x_l が互いに素であるとする。

ここで，x_{l+2} と x_{l+1} に 2 以上の公約数 G の存在を仮定すると，

$$x_{l+2}=Gx''_{l+2},\ x_{l+1}=Gx''_{l+1}\ （x''_{l+2} \text{と} x''_{l+1} \text{は整数}）$$

すると，$x_{l+2}=ax_{l+1}+bx_l$ から，$bx_l=G(x''_{l+2}-ax''_{l+1})$………②

これより，bx_l は G の倍数となるが，b と x_{l+1} は互いに素，また x_l と x_{l+1} も互いに素なので，②の成立はありえない。

よって，x_{l+2} と x_{l+1} には 2 以上の公約数 G が存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_{n+1} と x_n は互いに素である。

［解 説］

漸化式 $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$ において，a と b が互いに素，しかも x_n と x_{n-1} も互いに素であるとき，x_{n+1} と x_n が互いに素でない例はすぐに見つけられます。たとえば，$33=7\times3+6\times2$ です。ということは，このような例を出現させないためには何を示せばよいのか……，と考えていきました。しかし，試験時間の 2 時間は，優に超えました。